

Sinds 2008 vindt op de Vrije Universiteit Amsterdam jaarlijks de Junior Wiskunde Olympiade (JWO) plaats. De 90 beste deelnemers aan de Kangoerewedstrijd van groep 8 van de basisschool en de klassen 1 en 2 van havo en vwo nemen er aan deel. De wedstrijd bestaat uit vijftien multiple-choicevragen en tien open opgaven. Behalve een wedstrijd is de JWO ook een kans om kennis te maken met leuke wiskunde en om zelf onderzoek te doen.

■ door Jaap de Jonge

GETALLEN ZEVEN

OPGAVE 12 (JWO 2011, DEEL 1)

Acht kinderen noemen samen alle getallen van 1 tot en met 2011 op. Dat doen ze als volgt.

- Auke noemt alle getallen van 1 tot en met 2011 in groepjes van drie, waarbij ze steeds het middelste getal van de drie overslaat. Dus ze zegt: 1, 3, 4, 6, 7, 9, ..., 2005, 2007, 2008, 2010, 2011.
- Bernard noemt alle getallen die Auke niet genoemd heeft, in groepjes van drie, waarbij hij steeds het middelste getal van de drie overslaat.
- Carine noemt alle getallen die Auke en Bernard allebei niet genoemd hebben, in groepjes van drie, waarbij ze steeds het middelste getal van de drie overslaat.
- Doortje, Evert, Frans en Gerard gaan door volgens hetzelfde principe.
- Hendrik noemt ten slotte het enige getal dat nog door niemand genoemd is. Welk getal noemt Hendrik?

A) 712 B) 1094 C) 1123 D) 1265 E) 1387

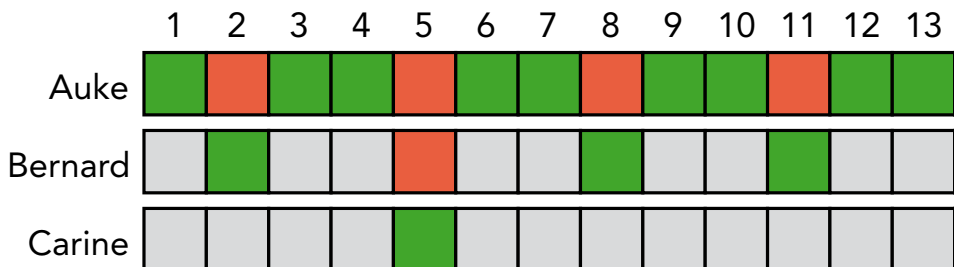
De opgave hierboven komt uit de vierde Junior Wiskunde Olympiade, die op 14 oktober 2011 werd gehouden. Zoals zo vaak is ook hier de eerste stap: lees de opgave goed. Maar dat goede lezen is hier

nu juist een van de moeilijkste stappen. Door de op het eerste gezicht ingewikkelde instructie, weet je niet precies wat er gebeurt. Om daar achter te komen is het heel nuttig om die instructie stap voor stap uit te voeren. Weliswaar is het veel te veel werk om alle getallen van 1 tot en met 2011 zo langs te lopen, maar door het begin uit te werken krijgen we al een eerste indruk.

Auke noemt 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, enzovoort. De vraag is: wanneer hebben we genoeg getallen opgeschreven om inzicht in het hele probleem te krijgen? Dat weten we niet, maar we merken later vanzelf of het nuttig is om nog meer getallen op te schrijven.

We begonnen met getallen opschrijven die Auke opnoemt, maar bij Bernard gaat het juist om de getallen die Auke *niet* genoemd heeft, dus 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, Al deze getallen zijn een veelvoud van 3 met 2 erbij opgeteld. Bernard laat daaruit weg 5, 14, 23, We houden nu maar weinig getallen over om regelmaat in te ontdekken, dus we zouden Aukes getallenrij kunnen uitbreiden met 18, 19, 21, 22, 24, 25, De rij van ongenoemde getallen (de veelvouden van 3 met 2 erbij) gaat dan verder met 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, We zien dan dat Bernard 5, 14, 23, 32, 41, ... weglaat.

Merk op dat Bernard alleen kan kiezen uit de getallen die niet door Auke zijn genoemd. Carine



De getallen die Auke, Bernard en Carine noemen zijn groen gekleurd.



moet kiezen uit de getallen die noch door Auke, noch door Bernard genoemd zijn. Voor Doortje tot en met Hendrik geldt hetzelfde principe, dus we hebben een soort zeef die in elke ronde de getallen die nog te kiezen zijn verder uitdunt.

Auke liet alle getallen ongenoemd die een veelvoud zijn van 3 met 2 erbij opgeteld. Bernard liet daaruit nog ongenoemd 5, 14, 23, 32, 41, ..., wat allemaal negenvouden zijn met daarbij 5 opgeteld. Dat is niet zo gek: Auke liet steeds het middelste getal uit een groepje van drie ongenoemd, en Bernard liet van die getallen steeds het middelste uit een groepje van drie ongenoemd, oftewel het middelste uit een groepje van oorspronkelijk negen getallen, dus het middelste van 1 tot en met 9, van 10 tot en met 18, van 19 tot en met 27 enzovoort.

Zo bekeken zien we dat Carine alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 = 27$, oftewel het middelste van 1 tot en met 27, van 28 tot en met 54, van 55 tot en met 81 enzovoort niet noemt, en Doortje alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, oftewel het middelste van 1 tot en met 81, van 82 tot en met 162 enzovoort.

Zo zouden we oneindig lang door kunnen gaan, maar dat hoeft niet, omdat Hendrik kennelijk het laatste getal noemt. Dat zou dan het enige getal moeten zijn dat door geen van de anderen is genoemd. De laatste voorganger van Hendrik was Gerard, die volgens de boven beschreven regelmaat alle getallen in het midden van groepjes van $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2187$ ongenoemd laat. Het eerste van die getallen is het middelste van 1 tot en met 2187, dus $(1 + 2187)/2 = 1094$, het volgende zou

zijn het middelste van 2188 tot en met 4374, ware het niet dat 2188 al groter is dan 2011. Dus is 1094 als enige vóór Hendrik nog ongenoemd. Dat is daarom het getal dat Hendrik noemt en het goede antwoord is dus B.

Hoe verschillend de opgaven van de JWO onderling ook zijn, deze aanpak is voor veel opgaven geschikt: goed lezen, stapje voor stapje het probleem proberen te begrijpen en vervolgens op te lossen, zo nodig door even een paar stapjes terug te doen.

Ook voor de komende eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade komt deze aanpak vaak van pas. Je hebt dan soms ook wel wat extra wiskundig-technische kennis nodig, zoals van π en de stelling van Pythagoras. Maar het is vooral zaak de opgaven goed te analyseren: de oplossing komt dan soms 'als vanzelf'. ■

Zet jij je tanden ook graag in zulk soort opgaven? Doe dan mee aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op vrijdagmiddag 27 januari. Alle leerlingen van havo/vwo klas 1 tot en met 5 kunnen meedoen. Geef je op bij je wiskundeleraar. Als je school niet meedoet, neem dan contact op met de landelijke organisatie (Melanie.Steentjes@cito.nl). Dan kijken wij of je op een andere school mee kan doen. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.

