Katernen

voor de

regionale training

ten behoeve van de

tweede ronde

van de

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie met uitwerkingen

Birgit van Dalen
Julian Lyczak
Quintijn Puite

Katernen

voor de

regionale training

ten behoeve van de

tweede ronde

van de

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Versie met uitwerkingen

Birgit van Dalen
Julian Lyczak
Quintijn Puite

Dit trainingsmateriaal is deels gebaseerd op materiaal van de Rijksuniversiteit Groningen, opgesteld door Jan Tuitman (juni 2003) en bewerkt door Wout de Goede (mei 2007) en Wim Berkelmans (Vrije Universiteit Amsterdam, augustus 2007), en materiaal van Hans Sterk (Technische Universiteit Eindhoven). We bedanken alle betrokkenen voor het beschikbaar stellen van hun materiaal.

Verder bedanken we de zes regionale steunpunten voor de samenwerking bij het opzetten en organiseren van regiobijeenkomsten. Dat zijn:

- Universiteit van Amsterdam
- Technische Universiteit Eindhoven
- Universiteit Leiden
- Radboud Universiteit Nijmegen
- Universiteit Twente
- Universiteit Utrecht

Versie: 21 februari 2009
Website: www.wiskundeolympiade.nl/trt

Op de website zijn van alle opgaven uitwerkingen te vinden. We raden je wel aan pas na het zelf proberen van een opgave de uitwerking erbij te pakken; dat is namelijk het meest leerzaam.
Er zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk van een opgave. Kijk er dus niet raar van op als de uitwerking op de website verschilt van jouw eigen oplossing.

Inhoudsopgave

Katern 1

Inductie en priemgetallen

1 Bewijzen voor oneindig veel getallen

Iedereen kent de positieve gehele getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Dit noemen we voortaan de **natuurlijke getallen**.

Als we daar 0 en de negatieve gehele getallen aan toe voegen, krijgen we de **gehele getallen**:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Wil je 27 minimarsjes eerlijk verdelen over 18 personen, dan zie je na heel even nadenken dat je iedereen er anderhalf kan geven. Je had ook (zonder nadenken) meteen kunnen zeggen: dan krijgt iedereen er $\frac{27}{18}$. Dit is een voorbeeld van een breuk. De **rationale getallen** (of **breuken**) zijn de getallen van de vorm $\frac{t}{n}$ waarbij t een geheel getal is en n een geheel getal dat niet gelijk is aan 0. We noemen t de **teller** en n de **noemer**. Een breuk laat zich op meerdere manieren schrijven. Zo is $\frac{27}{18}$ gelijk aan $\frac{3}{2}$.

Alle getallen van de getallenlijn samen vormen de verzameling van de **reële getallen**. Daartoe behoren 5, -3 en $\frac{27}{18}$, maar ook $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ en π. In Katern 4 zullen we bewijzen dat $\sqrt{5}$ echt geen breuk is. Het is dus een reëel getal dat niet een rationaal getal is. Dat wordt wel een irrationaal getal genoemd.

Ten slotte nog wat terminologie. Een uitdrukking van de vorm $a + b$ heet een **som** en is het resultaat van de **optelling** van de **termen** a en b. Een uitdrukking van de vorm $a \cdot b$ (of ab of $a \times b$) heet een **product** en is het resultaat van de **vermenigvuldiging** van de **factoren** a en b.

Nu kunnen we aan de slag!

Als je wilt weten of iets waar is voor *alle* natuurlijke getallen n (dus voor $n = 1, 2, 3, \ldots$), kun je ze niet allemaal afgaan: daar zou je oneindig lang mee bezig zijn. We gaan kijken naar methodes waarmee we toch dingen kunnen bewijzen voor alle natuurlijke getallen.

Voorbeeld 1. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n.$$

Oplossing Je kunt een tabelletje maken waarmee we in ieder geval even de eerste paar natuurlijke getallen kunnen controleren.

n	$(n+1)^2$	$(n-1)^2$	$(n+1)^2 - (n-1)^2$	$4n$
1	4	0	4	4
2	9	1	8	8
3	16	4	12	12
4	25	9	16	16
5	36	16	20	20
6	49	25	24	24
7	64	36	28	28

Je ziet dat de getallen in de laatste twee kolommen gelijk zijn. Dus de gelijkheid geldt voor de eerste zeven natuurlijke getallen. En daarmee hebben we precies alles gezegd wat je uit deze tabel kunt concluderen. Het zou fout zijn nu meteen te denken dat het altijd wel waar zal zijn. Niets garandeert ons dat dat zo is; wie weet gaat het voor $n = 100$ of $n = 12345$ wel mis (zie ook opgave 30).

Gelukkig kunnen we hier een bewijs geven door de haakjes uit te werken; we werken dan alleen maar met het abstracte getal n. Dat ziet er zo uit; het volgende is een aaneenschakeling van allemaal =-tekens die stuk voor stuk verklaarbaar zijn door eenvoudige algebraregels.

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\ &= n^2 - n^2 + 2n + 2n + 1 - 1 = 4n\end{aligned}$$

en dit geldt voor elke waarde van n waarmee we beginnen. (Trouwens, omdat we nergens hebben gebruikt dat n een natuurlijk getal is, geldt de gelijkheid zelfs voor alle reële getallen.)

Als het verschil van twee kwadraten ons had doen denken aan het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, hadden we ook de volgende uitwerking kunnen verzinnen:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - (n-1)^2 &= \big((n+1) + (n-1)\big)\big((n+1) - (n-1)\big) \\ &= (2n) \cdot (2) = 4n.\end{aligned}$$

Zoals je ziet, zijn er vaak meerdere manieren om iets te bewijzen. $\square$

Voorbeeld 2. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 4) + (3n + 7) = \tfrac{1}{2}(n + 2)(3n + 11).$$

Oplossing Ook hier maken we weer een tabelletje bij. Zoals je inmiddels weet, is dat nog geen bewijs, maar het laat in elk geval even zien wat er met de stippeltjes links gebeurt. We zien bijvoorbeeld dat er bij elke volgende waarde van n een extra term aan de linkerkant bij komt. Dit is ook best logisch: als n met 1 toeneemt, dan neemt $3n + 7$ met 3 toe, en dat is dus de volgende term in onze rij $4, 7, 10, \ldots$.

n	$4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 4) + (3n + 7)$	en dat is	$\frac{1}{2}(n + 2)(3n + 11)$	en dat is
1	$4 + 7 + 10$	21	$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 14$	21
2	$4 + 7 + 10 + 13$	34	$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 17$	34
3	$4 + 7 + 10 + 13 + 16$	50	$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20$	50
4	$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19$	69	$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 23$	69
5	$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$	91	$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 26$	91

We zien weer dat de gewenste kolommen gelijk zijn, maar hier kunnen we nog niet uit concluderen dat de gelijkheid voor alle n geldt. Er is wel een manier waarop we dit kunnen bewijzen.

Laten we voor een vaste waarde van n eens kijken naar de linkerkant van de gelijkheid die we moeten bewijzen. We noemen deze linkerkant even S, dus

$$S = 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 4) + (3n + 7).$$

Uit hoeveel termen bestaat S eigenlijk? Dat hangt natuurlijk van n af. We kunnen even in de tabel spieken; dan zien we dat op regel n de som uit $n+2$ termen bestaat. Dit is een prima redenering; we wisten immers al dat er elke keer één term bij komt.

Een andere manier om dit te zien is als volgt: de eerste term is 4, de tweede 7, etc. Omdat er steeds 3 bijkomt is de k-de term dus $3k + 1$; immers $3 \cdot 1 + 1 = 4$; $3 \cdot 2 + 1 = 7$, etc. De hoeveelste term is nou $3n + 7$? Uit $3k + 1 = 3n + 7$ volgt dat $k = n + 2$, dus $3n + 7$ is de $(n + 2)$-de term. Het zijn dus $n + 2$ termen.

We tellen deze som S bij zichzelf op, maar schrijven de tweede keer de termen in omgekeerde volgorde:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 1^{\text{e}} & & 2^{\text{e}} & & & & (n+1)^{\text{ste}} & & (n+2)^{\text{de}} \\
 & & & & & & & & & & \\
S & = & 4 & + & 7 & + & \ldots & + & (3n+4) & + & (3n+7) \\
S & = & (3n+7) & + & (3n+4) & + & \ldots & + & 7 & + & 4 \\
\hline
2S & = & (3n+11) & + & (3n+11) & + & \ldots & + & (3n+11) & + & (3n+11)
\end{array}$$

Daar staan onder de streep $n+2$ termen $(3n+11)$, dus $2S = (n+2)(3n+11)$, dus $S = \frac{1}{2}(n+2)(3n+11)$; klaar! $\square$

Het was blijkbaar slim op de som bij zichzelf op te tellen. Niemand verplicht ons dat te doen, maar blijkbaar werkte dat! En zo is het meestal met bewijzen. Je moet zelf het slimmigheidje bedenken dat toevallig net werkt.

Merk trouwens op dat het feitelijke bewijs hierboven (van 'Laten we…' tot 'klaar!') uit vooral heel veel woorden bestaat. Soms denken mensen dat een wiskundig bewijs alleen uit symbolen mag bestaan, maar niets is minder waar: Als je wilt uitleggen wat je aan het doen bent, heb je toch echt woorden nodig!

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een **rekenkundige rij**: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante verschillen (in dit geval was dat steeds 3). De beroemde wiskunde Gauss moest als jongetje van 10 ooit eens de getallen 1 tot en met 100 optellen. Hij wist op deze manier binnen een paar seconden het antwoord. Weet jij dat ook?

Voorbeeld 3. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Oplossing Ook hier maken we weer een tabelletje bij.

n	$1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}$	en dat is	2^n	en dat is
1	1	1	2^1-1	1
2	$1+2$	3	2^2-1	3
3	$1+2+4$	7	2^3-1	7
4	$1+2+4+8$	15	2^4-1	15
5	$1+2+4+8+16$	31	2^5-1	31
6	$1+2+4+8+16+32$	63	2^6-1	63
7	$1+2+4+8+16+32+64$	127	2^7-1	127

We zien weer dat de gewenste kolommen gelijk zijn, maar hier kunnen we nog niet uit concluderen dat de gelijkheid voor alle n geldt. Ook hier is er wel een manier waarop we dit kunnen bewijzen.

Laten we voor een vaste waarde van n eens kijken naar het linkerlid. We noemen dat linkerlid weer even S, dus

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Dan geldt — als we alles met 2 vermenigvuldigen — dat

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n.$$

Als we deze twee uitdrukkingen nu van elkaar aftrekken, vinden we dat

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
2S & = & & & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & & \\
\hline
2S - S & = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & 0 & + & 2^n
\end{array}$$

Dus $S = 2^n - 1$. □

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een **meetkundige rij**: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante factor verschillen. In dit geval was die constante factor 2. Het was blijkbaar slim om te kijken naar de waarde van $2S$ zodat alle termen 'een plekje doorschuiven'.

Opgave 1. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Uitwerking Voor vaste waarde van n staat er links de som S van een rekenkundige rij met n termen. Als we die weer handig onder elkaar zetten, zien we dat $2S = n \cdot (2n)$. Dus $S = n^2$. □

Opgave 2. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Uitwerking Als we, voor gegeven n, het linkerlid S met 3 vermenigvuldigen vinden we dat $3S = 3+9+27+\cdots+3^{n-1}+3^n$. Trekken we daar $S = 1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}$ vanaf, dan houden we over dat $2S = 3S-S = (3+9+27+\cdots+3^{n-1}+3^n)-(1+3+9+27+\cdots+3^{n-1}) = 3^n-1$, waaruit het gevraagde volgt. □

Opgave 3. *Van de 9 vakjes van een (3×3)-bord kunnen we op verschillende manieren rechthoeken vormen. Allereerst zijn er de 9 (1×1)-vierkantjes, de 4 (2×2)-vierkantjes en het (3×3)-vierkant zelf. Daarnaast zijn er nog de volgende rechthoeken te maken: 6 (1×2) en 6 (2×1); 3 (1×3) en 3 (3×1); 2 (2×3) en 2 (3×2). Dat zijn er in totaal 36. Hoeveel rechthoeken bevat een (8×8)-bord?*

Uitwerking We nummeren de rijen en de kolommen van het (8×8)-bord zodat ieder vakje coördinaten (x, y) krijgt.

(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)
(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)

Een rechthoek wordt volledig bepaald door zijn rechterbovenhoek (p, q) en zijn linkeronderhoek (x, y). In het figuur zie je op deze manier drie rechthoeken met rechterbovenhoek $(p, q) = (7, 4)$, namelijk die met linkeronderhoek $(x, y) = (3, 3)$, $(5, 3)$ of $(5, 1)$. In totaal kunnen we alle rechthoeken met rechterbovenhoek $(p, q) = (7, 4)$ vinden door als linkeronderhoek (x, y) te nemen waarbij $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ of 7 en waarbij $y = 1, 2, 3$ of 4. Dat zijn 4×7 mogelijkheden. Analoog zien we dat er in het algemeen $q \times p$ mogelijke rechthoeken met rechterbovenhoek (p, q) zijn. We moeten dus al deze getallen $q \times p$ optellen. Dat doen we per rij.

In de onderste rij staan van links naar rechts achtereenvolgens de getallen $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \ldots, 1 \times 8$.
In totaal is dus de som van de eerste rij: $1 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
In de tweede rij is de som: $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
In de derde rij is de som: $3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
$\vdots$
In de achtste rij ten slotte: $8 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
Totaal dus: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.
Nu weten we dat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1}{2} \times 8 \times (1 + 8) = 36$, dus er zijn in totaal $36^2 = 1296$ rechthoeken. (Zie ook opgave B1 van de Eerste Ronde 2008.) □

Opgave 4. ***Tweede Ronde 2005*** *Voor vijf verschillende reëele getallen a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 kijken we naar de waarden die de som $a_i + a_j$ kan aannemen wanneer i en j variëren over $1 \leq i < j \leq 5$. Het aantal verschillende waarden dat de som $a_i + a_j$ kan aannemen noemen we m. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van m.*

Uitwerking We ordenen de vijf getallen van klein naar groot en noemen ze voor het gemak a, b, c, d en e, dus $a < b < c < d < e$. Dan geldt:

$$a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e,$$

dus we krijgen sowieso ten minste 7 verschillende uitkomsten. Met het voorbeeld $a = 1, b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ en $e = 5$ vinden we voor de 10 sommen $a_i + a_j$ de waarden $3, 4, 5, 6, 7, 8$ en 9. Dus is 7 de kleinst mogelijke waarde van m. □

2 Inductie

We bekijken nog een keer voorbeeld 3. Die kunnen we namelijk ook heel anders oplossen.

Voorbeeld 4. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Oplossing Laten we nog eens kijken in de tabel bij $n = 5$. We zien dat de gelijkheid daar klopt, dat wil zeggen $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1$. Als we dat eenmaal weten is het meteen duidelijk dat het bij $n = 6$ ook klopt: tel er maar aan beide kanten 32 bij op, dan krijg je $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 32 = 32 + 32 - 1 = 64 - 1$ en dat is precies wat we bij $n = 6$ wilden bewijzen. En als we bij deze gelijkheid aan beide kanten 64 optellen, komen we uit op de bewering voor $n = 7$: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 64 + 64 - 1 = 128 - 1$.

Wat gebeurt hier nu precies? Laten we de $n = 5$ uit bovenstaand voorbeeld nu even $n = k$ noemen, waarbij k een willekeurig natuurlijk getal is. Stel dat je al weet dat $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Dan mogen we daar aan beide kanten 2^k bij optellen. Dan krijg je $\left(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1}\right) + 2^k = 2^k + 2^k - 1$. Maar $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, dus hier staat nu $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$. En dat is precies de bewering voor n 'eentje hoger', oftewel, voor $n = k + 1$. We hebben in de voorgaande zinnen dus bewezen dat *als* de gelijkheid geldt voor $n = k$, hij dan ook geldt voor $n = k + 1$. Kortom, *als* hij geldt voor $n = 1$, dan ook voor $n = 2$, en dan automatisch ook voor $n = 3$, en dan ook voor $n = 4$, etc. We hoeven dus nog maar één ding te laten zien: dat hij ook daadwerkelijk geldt voor $n = 1$. Maar dat is in dit geval simpel: vul maar in $n = 1$ en kijk of het klopt (of kijk naar de tabel). $\square$

Deze uitwerking is een voorbeeld van een inductief bewijs: Als we een gelijkheid bewijzen voor $n = 1$ en als we er bovendien in slagen om uit de gelijkheid voor $n = k$ diezelfde gelijkheid voor $n = k + 1$ af te leiden, dan moet het wel zo zijn dat de gelijkheid voor alle n geldt. Deze redenering heet met een deftig woord: *volledige inductie* of *inductie* naar n. De tijdelijke aanname dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ (om daaruit af te leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$) heet de *inductiehypothese* en wordt soms genoteerd als IH.

Je zou dit kunnen vergelijken met een rij dominosteentjes op dominoday. Als je steentje 1 omver duwt, valt steentje 2 ook om. En daarom ook steentje 3. En daarom ook steentje 4. De bouwers hebben ervoor gezorgd dat als een willekeurig steentje omvalt, hij de volgende ook omver duwt. Dat is dus de stap van $n = k$ naar $n = k + 1$, zeg maar de doorgeefstap. Om het geheel in beweging te zetten hoeven we alleen nog maar een duwtje tegen dominosteen $n = 1$ te geven, dan valt wegens de doorgeefstap ook steentje $n = 2$, dus wegens de volgende doorgeefstap ook steentje $n = 3$, et cetera. In de wiskunde noemen we de doorgeefstap normaliter de *inductiestap*; het eerste zetje heet juist de *inductiebasis*.

In het bewijs hierboven werkte het om er links en rechts 2^k bij op te tellen. Maar soms moet je hele andere dingen doen om uit de veronderstelling dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ af te kunnen leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$. Het zou ook kunnen dat je er links en rechts juist iets moet afhalen, of dat je links en rechts alles met factor 10 moet vermenigvuldigen, of dat je links en rechts het kwadraat moet nemen, of .... Om te oefenen, kijken we nog eens naar opgave 2. Probeer hem nu eens met inductie!

Opgave 5. *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 1$ is het duidelijk: links staat dan 1 en rechts staat dan $\frac{1}{2}(3^1 - 1)$ en dat is ook 1.
(Inductiestap) Stel dat het voor zekere $n = k \geq 1$ geldt, dus stel dat $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{k-1} = \frac{1}{2}(3^k - 1)$. Daaruit volgt dat $(1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{k-1}) + 3^k = \frac{1}{2}(3^k - 1) + 3^k = \frac{1}{2}(3^k - 1 + 2 \cdot 3^k) = \frac{1}{2}(3 \cdot 3^k - 1) = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$ en dat is precies de bewering voor $n = k + 1$.
'Met inductie' concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. $\square$

Vaak kun je door inductie een intuïtief idee hard maken. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar opgave 1. Voor $n = 3$ staat daar $1 + 3 + 5 = 3^2$ en dat zouden we ons kunnen voorstellen als 1 en 3 en 5 knikkers die samen in een 3×3-vierkant liggen. Het is 'logisch' dat als we nu 7 knikkers toevoegen, we een 4×4-vierkant verkrijgen. En zo alsmaar verder. Om dit laatste zinnetje 'en zo alsmaar verder' wiskundig te verantwoorden, gebruiken we inductie. Zie het volgende voorbeeld.

⋮	⋮	⋮	⋮	
7	7	7	7	…
5	5	5	7	…
3	3	5	7	…
1	3	5	7	…

Voorbeeld 5. *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Oplossing We gaan deze opgave dus nu met inductie doen.
(Inductiebasis) We kijken eerst maar eens of het voor $n = 1$ geldt. Dan staat er links de som van 1 tot en met 1 en daarmee wordt dus alleen het getal 1 bedoeld. Rechts staat dan 1^2 en dat is ook 1. Dus dan geldt de gelijkheid. We zouden het nu ook even voor een paar andere waarden kunnen uitrekenen en vergelijken maar voor ons bewijs met inductie hebben we aan een duwtje genoeg.
(Inductiestap) Stel dat het voor zekere $n = k \geq 1$ geldt, dus stel dat $1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$. Hoe kunnen we dit gebruiken als we willen bewijzen dat het ook voor $n = k + 1$ geldt, oftewel dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$? Aan de linkerkant is er dan een term $(2k + 1)$ bijgekomen dus laten we dat rechts ook maar doen. Dan volgt uit $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ dat $\big(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)\big) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$. Maar dat laatste is op zijn beurt weer $(k + 1)^2$. We concluderen dat dan dus blijkbaar

geldt dat $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$, precies wat we wilden bewijzen. 'Met inductie' concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. $\square$

Opgave 6. *Aan een schaaktoernooi doen $n \geq 2$ spelers mee. Elke twee spelers spelen precies één keer tegen elkaar. Bewijs met inductie dat er in totaal $\frac{1}{2}(n^2-n)$ wedstrijden gespeeld worden.*

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n=2$ hoeft er maar 1 wedstrijd te worden gespeeld. Dat is ook precies de uitkomst van $\frac{1}{2}(2^2-2)$.
(Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n=k\geq 2$. Dus k spelers doen in totaal $\frac{1}{2}(k^2-k)$ wedstrijden. Als er nu een $(k+1)^{\text{ste}}$ speler bij komt, moet hij nog tegen iedereen spelen. Er komen dan dus k wedstrijden bij. Dat zijn er in totaal $\frac{1}{2}(k^2-k)+k$, of te wel $\frac{1}{2}(k^2+k)$. De vraag is of dit gelijk is aan $\frac{1}{2}((k+1)^2-(k+1))$. Het antwoord is ja: $\frac{1}{2}((k+1)^2-(k+1))=\frac{1}{2}(k^2+2k+1-k-1)=\frac{1}{2}(k^2+k)$. $\square$

De volgende opgaven zijn meteen al best pittige toepassingen van inductie. Onze tip is: kijk goed wat er in het linkerlid voor term bij komt bij elke volgende waarde van n. En nog een heel nuttige tip: werk zo min mogelijk haakjes uit aan de rechterkant maar werk met gemeenschappelijke factoren. Als je bijvoorbeeld in je berekening stuit op $n(n+5)+3(n+5)$ zou je de haakjes kunnen gaan uitwerken, maar het is vaak veel gemakkelijker om de gemeenschappelijk factor $(n+5)$ buiten haakjes te halen en dit te herschrijven tot $(n+3)(n+5)$. Dat kan aanzienlijk schelen in het rekenwerk, dus we geven het graag als tip bij de volgende opgaven mee.

Bovendien zie je nu niet meer 'met inductie' in de opgave staan; dat was net om te oefenen nog wel zo, maar vanaf nu bepaal jij bij het uitwerken wel of je het met inductie gaat doen of niet. Hieronder is de tip natuurlijk om het wel met inductie te proberen, maar bij geen enkele olympiade opgave zul je worden verplicht om het per se met inductie aan te pakken. Als je het wel met inductie doet, vermeld dat dan en splits je uitwerking op in een inductiebasis en een inductiestap.

Opgave 7. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+3)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+5).$$

Uitwerking Inductie naar n.
(Inductiebasis) Voor $n=1$ staat er links maar één term, namelijk $1\cdot 4$. Rechts staat $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 6$. Beide kanten zijn gelijk aan 4.
(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n=k\geq 1$: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+k\cdot(k+3)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+5)$ (IH). Dan komt er in de volgende stap links een term bij: $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\cdots+k\cdot(k+3)+(k+1)\cdot(k+4)$. We moeten bewijzen dat

deze uitdrukking gelijk is aan $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$. Wel, het linkerlid kunnen we met behulp van de inductiehypothese als volgt herschrijven:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + k \cdot (k+3) + (k+1) \cdot (k+4) \overset{\text{(IH)}}{=} \tfrac{1}{3}k(k+1)(k+5) + (k+1) \cdot (k+4),$$

wat we verder kunnen omschrijven tot $\frac{1}{3}(k{+}1)\big(k(k{+}5){+}3(k{+}4)\big) = \frac{1}{3}(k{+}1)\big(k^2{+}8k{+}12\big) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$ en dat is precies het rechterlid dat we zochten.
'Met inductie' concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. $\square$

Opgave 8. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$0 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 0 = \tfrac{1}{6}(n+1)n(n-1).$$

Uitwerking Inductie naar n.
(Inductiebasis) Voor $n = 1$ staat er links $0 \cdot 1 + 1 \cdot 0$, wat 0 is. Rechts staat $\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$ en dat is ook 0.
(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$:

$$0 \cdot k + 1 \cdot (k-1) + \cdots + (k-1) \cdot 1 + k \cdot 0 = \tfrac{1}{6}(k+1)k(k-1). \quad \text{(IH)}$$

Te bewijzen is nu dat

$$0 \cdot (k+1) + 1 \cdot (k) + \cdots + (k-1) \cdot 2 + k \cdot 1 + (k+1) \cdot 0 = \tfrac{1}{6}(k+2)(k+1)k.$$

Links is er $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \cdots + (k-1) \cdot 1 + k \cdot 1$ bij gekomen en dat is $\frac{1}{2}(k+1)k$. Dus volgens de inductiehypothese is de waarde van het nieuwe linkerlid gelijk aan $\frac{1}{6}(k+1)k(k-1) + \frac{1}{2}(k+1)k = \frac{1}{6}(k+1)(k)\big((k-1)+3\big) = \frac{1}{6}(k+1)(k)(k+2)$ en dat is precies wat we wilden bewijzen.
'Met inductie' concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. $\square$

Het hoeven niet altijd gelijkheden te zijn die we kunnen bewijzen met inductie. Ook andere beweringen dan 'iets is gelijk aan iets anders' kun je soms met inductie bewijzen. Bijvoorbeeld: 'iets is kleiner dan iets anders'; 'iets is deelbaar door iets anders', etc. Hier twee voorbeelden.

Voorbeeld 6. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 4$ geldt dat $2^n + 5 > 5n$.*

Oplossing Een tabel komt al erg overtuigend over; de linkerkant groeit nou eenmaal veel harder (exponentieel) dan de rechterkant (lineair). Toch moeten we het wiskundig nog netjes bewijzen. We doen dat met inductie naar n. Omdat we het pas hoeven te bewijzen vanaf $n = 4$ beginnen we daar.
(Inductiebasis) Voor $n = 4$ geldt $2^n + 5 = 21$ en $5 \cdot n = 20$, dus dan klopt het.
(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 4$. Er geldt dan

dus sowieso dat $2^k + 5 > 5k$. Bovendien geldt er, wegens $k \geq 4$, dat $2^k \geq 2^4 = 16 > 5$. Als we dat nou combineren vinden we dat

$$2^{k+1} + 5 = 2 \cdot 2^k + 5 = (2^k + 5) + 2^k > 5k + 2^k > 5k + 5 = 5(k + 1).$$

Maar daar staat precies onze bewering voor $n = k+1$. We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen n vanaf de 4 geldt. $\square$

Voorbeeld 7. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$ deelbaar is door 11 (dat wil zeggen: een 11-voud is).*

Oplossing We maken eerst maar eens een tabel:

n	3^{3n+1}	$7 \cdot 5^{n-1}$	$3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$	deelbaar door 11?
1	81	7	88	ja, nl. $11 \cdot 8$
2	2187	35	2222	ja, nl. $11 \cdot 202$
3	59049	175	59224	ja, nl. $11 \cdot 5384$
4	1594323	875	1595198	ja, nl. $11 \cdot 145018$
5	43046721	4375	43051096	ja, nl. $11 \cdot 3913736$
6	1162261467	21875	1162283342	ja, nl. $11 \cdot 105662122$
7	31381059609	109375	31381168984	ja, nl. $11 \cdot 2852833544$

Het lijkt te kloppen. Toch zien we niet direct een factor 11 terug in de schrijfwijze $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$ (zoals we wel zouden hebben gezien in bijvoorbeeld $33n+55n^2$; dat is $11 \cdot (3n+5n^2)$). Laten we eens kijken of we de inductiestap kunnen maken.

De inductiehypothese luidt dan: stel $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1}$ is een 11-voud. Dan kun je dat dus schrijven als $11 \cdot c$ voor zekere gehele c, dus $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1} = 11c$. Wat betekent dit nu voor de volgende waarde? Voor $n = k + 1$ komt er te staan $3^{3(k+1)+1} + 7 \cdot 5^{(k+1)-1}$ en dat is wegens de regels voor de machten hetzelfde als

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot 7 \cdot 5^{k-1}.$$

Wegens de inductiehypothese geldt $7 \cdot 5^{k-1} = 11c - 3^{3k+1}$ en als we dat hierin invullen krijgen we

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot (11c - 3^{3k+1}) = 22 \cdot 3^{3k+1} + 55c = 11 \cdot (2 \cdot 3^{3k+1} + 5c)$$

en dat is duidelijk een 11-voud. Omdat de bewering bovendien geldt voor $n = 1$ (zie tabel), geldt hij wegens inductie dus voor alle natuurlijke getallen n. $\square$

Opgave 9. *Bewijs dat $2 \cdot 3^n > 7n + 3$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$.*

Uitwerking We bewijzen dit met inductie naar n.
(Inductiebasis) Voor $n = 2$ staat er $18 > 17$ en dat is waar.
(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 2$. Er geldt $4 \cdot 3^k \geq 36 > 7$, dus

$$2 \cdot 3^{k+1} = 2 \cdot 3^k + 4 \cdot 3^k \overset{\text{IH}}{>} 7k + 3 + 4 \cdot 3^k > 7k + 3 + 7 = 7(k+1) + 3.$$

en dat is de bewering voor $n = k + 1$. We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen n vanaf de 2 geldt. $\square$

Opgave 10. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4.*

Uitwerking We bewijzen dit met inductie naar n.
(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt: $7^1 + 3^2 = 16$ en dat is een 4-voud, dus okay.
(Inductiestap) Stel dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. Dan is $(7^k + 3^{k+1})$ is een 4-voud, zeg $7^k + 3^{k+1} = 4q$ voor zekere gehele q. Dus $(7^{k+1} + 3^{k+2}) = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 4 \cdot 7^k + 3 \cdot (7^k + 3^{k+1}) = 4 \cdot 7^k + 3 \cdot 4q$ en dat is duidelijk weer een viervoud. Dus dan geldt het voor $n = k + 1$. We concluderen wegens inductie dat de bewering voor alle natuurlijke getallen n geldt. $\square$

Opgave 11. *Voor een rij natuurlijke getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt*

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2$,
- $a_{n+2} = a_n^2 + 2a_{n+1}$ *voor* $n \geq 1$.

Bewijs dat a_{2n+1} oneven is voor alle gehele getallen $n \geq 0$.

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 0$ moeten we kijken naar a_1 en die is 1, dus oneven.
(Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n = k \geq 0$, dus a_{2k+1} is oneven. Dan $a_{2(k+1)+1} = a_{2k+3} = a_{2k+1}^2 + 2a_{2k+2}$. De tweede term is even wegens de factor 2 terwijl de eerste term oneven is als kwadraat van een getal dat per inductiehypothese oneven is. Daarmee is de som (oneven + even) ook oneven, dus $a_{2(k+1)+1}$ is oneven. En dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. $\square$

Opgave 12. *Een aantal steden is verbonden door éénrichtingsverkeerwegen. Tussen elk tweetal steden loopt een directe weg (de ene kant op of de andere kant op). Bewijs dat er een stad is die te bereiken is vanuit alle andere steden (eventueel via andere steden).*

Uitwerking (Inductiebasis) Als er maar één stad is, is het triviaal; die stad is te bereiken uit alle andere steden want er zijn geen andere steden.
Als je dit een beetje vreemde redenering vindt, begin dan gewoon bij $n = 2$. Tussen de twee steden loopt een éénrichtingsverkeerweg, zeg van A naar B. Dan is B vanuit alle andere steden (namelijk A) te bereiken.
(Inductiestap) Veronderstel dat we dit al bewezen hebben voor elk netwerk van $n = k$ steden met éénrichtingsverkeerwegen daartussen. We kijken nu naar een netwerk van $n = k+1$ steden. We kiezen een van de steden uit (zeg de hoofdstad H) en laten die even weg, evenals alle wegen die van of naar H lopen. Dan hebben we weer een netwerk van k steden en daarvan weten we per inductiehypothese dat er een stad is (zeg B) die vanuit alle andere steden te bereiken is. Nu kijken we weer naar ons netwerk met H erbij. Er is een weg tussen B en H (want tussen elk tweetal steden). Als die weg van H naar B loopt, dan is B ook in dit grotere netwerk nog steeds de stad die vanuit alle andere steden te bereiken is. Als die weg echter van B naar H loopt, dan is juist H een stad die vanuit alle andere steden te bereiken is. $\square$

Opgave 13. *Voor een rij reële getallen x_1, x_2, x_3, … geldt $x_1 > \frac{1}{2}$ en*

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \tfrac{1}{4}}.$$

Bewijs dat voor alle natuurlijke n geldt $x_n > \frac{1}{2}$.

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 1$ is de bewering waar wegens het gegeven.
(Inductiestap) Stel dat de bewering geldt voor $n = k \geq 1$, dus $x_k > \frac{1}{2}$. Dan $x_k - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$ dus $\sqrt{x_k - \frac{1}{4}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$, oftewel $x_{k+1} > \frac{1}{2}$. Dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. $\square$

Opgave 14. ***Tweede Ronde 1984*** *Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ wordt a_n gedefiniëerd door:*

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$

Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 1$ moeten we laten zien dat $\frac{1}{\sqrt{4}} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. De eerste ongelijkheid is een gelijkheid (dus klopt) en voor de tweede is het handig om $\frac{1}{2}$ even te schrijven als $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$; wegens $8 > 4$ geldt $\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.
(Inductiestap) Veronderstel dat het geldt voor $n = k \geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq a_k \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}$.

Te bewijzen: $\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq a_{k+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}$. Merk op dat $a_{k+1} = \frac{3k+1}{3k+2} a_k$ dus uit de inductiehypothese volgt dat

$$\frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq a_{k+1} \leq \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}.$$

Resteert te bewijzen:

$$(1): \quad \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \quad \text{en} \quad (2): \quad \frac{3k+1}{3k+2} \frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}.$$

Laten we eerst een kijken hoe we ongelijkheid (1) kunnen bewijzen. Deze kunnen we omschrijven tot $\frac{1}{\sqrt{3k+4}} \leq \frac{\sqrt{3k+1}}{3k+2}$ en dus tot $(3k+2) \leq \sqrt{3k+1}\sqrt{3k+4}$. We hebben hierbij alleen maar vermenigvuldigd met positieve factoren, dus het teken is niet omgeklapt. Als we linker- en rechterkant kwadrateren en verder uitwerken komen we uit op twee uitdrukkingen die we goed kunnen vergelijken: $(3k+2)^2 = (3k)^2 + 4(3k) + 4$ en $(3k+1)(3k+4) = (3k)^2 + 5(3k) + 4$ en het is nogal triviaal dat $(3k)^2 + 4(3k) + 4 \leq (3k)^2 + 5(3k) + 4$, want rechts staat in feite een term $(3k)$ meer. We kunnen dus concluderen dat $(3k+2)^2 \leq (3k+1)(3k+4)$. (We kunnen de laatste paar zinnen samenvatten door:

$$(3k+2)^2 = (3k)^2 + 4(3k) + 4 \leq (3k)^2 + 5(3k) + 4 = (3k+1)(3k+4);$$

daarbij is elk (on)gelijkheidsteken goed te verklaren!) Door nu al deze stappen weer terug te zetten — de wortel te nemen (daarbij komen we weer op de oorspronkelijke uitdrukkingen uit, want die waren positief) en te delen door de positieve factoren — zien we dus dat (1) ook klopt.

Dan nu ongelijkheid (2). Deze kunnen we omschrijven tot $\frac{\sqrt[3]{3k+1}^2}{3k+2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}$ en dus tot $\sqrt[3]{3k+1}^2 \sqrt[3]{3k+4} \leq (3k+2)$. We gaan nu juist links en rechts de derdemacht nemen. Inderdaad is de ene uitgewerkte uitdrukking kleiner dan of gelijk aan de tweede:

$$(3k+1)^2(3k+4) = (3k)^3 + 6(3k)^2 + 9(3k) + 4 \leq (3k)^3 + 6(3k)^2 + 12(3k) + 8 = (3k+2)^3.$$

Door terug te redeneren zien we dat (2) dus ook klopt. $\square$

Opgave 15. ***Tweede Ronde 1986*** *Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 1$ staat er links $\frac{1}{2}$ en rechts ook.
(Inductiestap) Veronderstel dat het geldt voor $n = k \geq 1$. Dan geldt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}.$$

Als we de stap maken naar $n = k+1$ komt er links een term $\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ bij, terwijl er rechts enerzijds twee termen bijkomen ($\frac{1}{2k+1}$ en $\frac{1}{2k+2}$) maar ook een term af gaat (namelijk $\frac{1}{k+1}$). Netto komt er rechts dus $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$ bij en als we dat gelijknamig maken komen we uit op $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{2}{2k+2} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{(2k+2)-(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$. Laat dat nou precies zijn wat er links ook bijkomt! Aan beide kanten komt er dus hetzelfde bij en vanuit de inductiehypothese hebben we dus de bewering voor $n = k+1$ afgeleid. $\square$

Opgave 16. ***Tweede Ronde 1990*** *Bewijs dat voor alle gehele $n > 1$ geldt:*

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n-1) < n^n.$$

Uitwerking (Inductiebasis) Voor $n = 2$ staat hier $1 \cdot 3 < 2^2$ en dat is overduidelijk waar.
(Inductiestap) Stel dat $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2k-1) < k^k$ voor een zekere $k > 1$. Dan moeten we bewijzen dat $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1) < (k+1)^{k+1}$. Uit de inductiehypothese volgt dat $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1) < k^k(2k+1)$. Dus resteert te bewijzen: $k^k(2k+1) \leq (k+1)^{k+1}$. Werken we het rechterlid uit met het binomium van Newton, dan vinden we $(k+1)^{k+1} = \binom{k+1}{k+1}k^{k+1} + \binom{k+1}{k}k^k + \binom{k+1}{k-1}k^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}k^1 + \binom{k+1}{0}k^0$ en dat is groter dan of gelijk aan de eerste twee termen $\binom{k+1}{k+1}k^{k+1} + \binom{k+1}{k}k^k = k^{k+1} + (k+1)k^k = k \cdot k^k + (k+1)k^k = (2k+1)k^k$, waarmee we het gevraagde hebben bewezen. $\square$

Opgave 17. ***Tweede Ronde 2007*** *Bestaat er een getal van de vorm* $444 \cdots 4443$ *(allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.*

Uitwerking Noem a_n het getal bestaande uit n 4'en en op het eind een 3. We gaan bewijzen dat voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ geldt dat a_n geen 13-voud is. (Inductiebasis) Aangezien a_0 gelijk is aan 3, is a_0 geen 13-voud.
(Inductiestap) Stel a_k is geen 13-voud voor een zekere $k \geq 0$. We verkrijgen a_{k+1} uit a_k door a_k met 10 te vermenigvuldigen en er 13 bij op te tellen: $a_{k+1} = 10a_k + 13$. Nu is a_k geen 13-voud, dus $10a_k$ ook niet, dus $10a_k + 13$ ook niet. $\square$

3 Priemgetallen

De **delers** van een getal, bijvoorbeeld 50, zijn precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de delers van 50 zijn $1, 2, 5, 10, 25, 50$. Sommige getallen zijn door heel veel natuurlijke getallen deelbaar, sommige maar door heel weinig. Hier een tabel van de eerste tien natuurlijke getallen en al hun delers:

n	de delers van n	
1	1	—
2	1, 2	priem
3	1, 3	priem
4	1, 2, 4	samengesteld
5	1, 5	priem
6	1, 2, 3, 6	samengesteld
7	1, 7	priem
8	1, 2, 4, 8	samengesteld
9	1, 3, 9	samengesteld
10	1, 2, 5, 10	samengesteld

Alle natuurlijke getallen zijn in ieder geval deelbaar door 1 en door zichzelf. De natuurlijke getallen groter dan 1 die *alleen* door 1 en zichzelf deelbaar zijn, heten *priemgetallen*. Een natuurlijk getal dat nog meer delers heeft (dan 1 en zichzelf), heet *samengesteld*. Volgens afspraak valt 1 buiten de boot; hij is noch priem noch samengesteld.

In termen van delers kunnen we dus zeggen dat de priemgetallen precies de natuurlijke getallen zijn met exact twee delers, en dat de samengestelde getallen precies de natuurlijke getallen zijn met meer dan twee delers. Het getal 1 is het enige natuurlijke getal met maar één deler.

Opgave 18. ***(a)*** *Laat van de volgende getallen zonder rekenmachine zien dat het geen priemgetallen zijn:* 2008*;* 12345678*;* 12345*;* 489489*;* $137^2 - 135^2$ *(zie ook voorbeeld 1).*
(b) *Hoeveel even priemgetallen zijn er? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door* 17*? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door* 25*?*

Uitwerking (a) $2008 = 2 \cdot 1004$;
12345678 is ook even;
12345 is een 5-voud;
$489489 = 489 \cdot 1001$;
$137^2 - 135^2 = (137 - 135)(137 + 135) = 4 \cdot 136$.
(b) 1 (namelijk alleen het getal 2; elk ander even positief getal n is deelbaar door $2 < n$);
1 (namelijk alleen het getal 17; elk ander positief 17-voud n is deelbaar door $17 < n$);
0 (elk positief 25-voud n is namelijk deelbaar door $5 < n$). □

Voorbeeld 8. *Ga na voor welke natuurlijke getallen n het getal* $4^n - 1$ *priem is.*

Oplossing Voor een gegeven natuurlijk getal n kunnen we $4^n - 1$ ontbinden in factoren: $4^n - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$. We zouden nu wellicht in de verleiding kunnen komen om te zeggen dat $4^n - 1$ altijd samengesteld is. Toch zit hier een addertje onder het gras: een van de factoren zou 1 kunnen zijn. En laat dat nou net bij $n = 1$ het geval zijn. De conclusie luidt dat $4^n - 1$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$ een samengesteld getal is. $\square$

Opgave 19. *Ga na voor welke paren natuurlijke getallen* (m, n) *het getal* $m^2 - n^2$ *priem is.*

Uitwerking We weten dat $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ en dat ziet er vrij samengesteld uit. De enige keren dat het priem zou kunnen zijn, is als $m + n = 1$ (maar dat kan natuurlijk niet, want $m \geq 1$ en $n \geq 1$ dus $m + n \geq 2$) of als $m - n = 1$ (en dat zou prima kunnen: $m = n + 1$). We hoeven dus alleen nog maar de gevallen te onderzoeken waar $m = n + 1$. Dan geldt $m^2 - n^2 = (n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$. Dat zou priem kunnen zijn of niet. De paren $(m, n) = (n + 1, n)$ die voldoen zijn dus precies de paren waarbij $2n + 1 = p$ voor zeker priemgetal p. Dat moet dan wel een oneven priemgetal zijn. Omgekeerd hoort er bij elk oneven priemgetal een natuurlijk getal n. Er geldt in dat geval dat $n = \frac{p-1}{2}$ en dus dat $m = n + 1 = \frac{p-1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{p+1}{2}$. Conclusie: het geldt precies voor alle paren $(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2})$, waarbij p de oneven priemgetallen $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$ doorloopt. Voor de volledigheid geven we even de eerste paren; let op de gaten ertussen!

$$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 5), (7, 6), (9, 8), (10, 9), (12, 11), (15, 14), \ldots$$

$\square$

Opgave 20. *Er zijn 25 priemgetallen onder de 100. Vind ze door in onderstaande tabel eerst alle veelvouden van 2 weg te strepen (behalve 2 zelf natuurlijk), dan alle veelvouden van 3 die er nog staan ook weg te strepen, enzovoorts.*

	2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
21	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*
31	*32*	*33*	*34*	*35*	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*
41	*42*	*43*	*44*	*45*	*46*	*47*	*48*	*49*	*50*
51	*52*	*53*	*54*	*55*	*56*	*57*	*58*	*59*	*60*
61	*62*	*63*	*64*	*65*	*66*	*67*	*68*	*69*	*70*
71	*72*	*73*	*74*	*75*	*76*	*77*	*78*	*79*	*80*
81	*82*	*83*	*84*	*85*	*86*	*87*	*88*	*89*	*90*
91	*92*	*93*	*94*	*95*	*96*	*97*	*98*	*99*	*100*

Uitwerking De priemgetallen die je dan vindt zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. $\square$

Als we 5 opeenvolgende gehele getallen opschrijven, zoals $17, 18, 19, 20, 21$, is het logisch dat er één van die getallen deelbaar is door 5. Hier kunnen we zelfs precies zeggen welke:

het getal 20. Maar als we voor gegeven n kijken naar $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, ook dan weten we nog zeker dat één van deze getallen wel een 5-voud moet zijn. Overtuig jezelf ervan dat dan bijvoorbeeld $n+20, n+16, n+12, n+8, n+4$ ook precies één vijfvoud bezit; het enige dat we hebben gedaan is overal een vijfvoud bij opgeteld. Deze techniek kan van pas komen bij de volgende opgaven.

Opgave 21. ***(a)*** *Vind alle priemgetallen p waarvoor $p+1$ ook een priemgetal is.*
(b) *Vind alle priemgetallen p waarvoor $p+2$ en $p+4$ ook priemgetallen zijn.*

Uitwerking (a) Van p en $p+1$ moet een van beide even zijn. Er bestaat echter maar één even priemgetal: 2. Dus ofwel $p=2$ (zodat $p+1=3$; die is inderdaad priem) ofwel $p+1=2$ (zodat $p=1$, maar dat is geen priemgetal). De enige oplossing is dus $p=2$.
(b) Van p, $p+2$ en $p+4$ moet een van de drie een drievoud zijn. Er bestaat echter maar één priemgetal dat een drievoud is: 3. Dus moet ofwel $p=3$ (en die voldoet: $p+2=5$ en $p+4=7$) ofwel $p+2=3$ (maar dan $p=1$; tegenspraak) ofwel $p+4=3$ (maar dan $p=-1$; tegenspraak). De enige oplossing is dus $p=3$. □

Opgave 22. *Bewijs dat $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ voor alle natuurlijke getallen n een geheel getal is.*

Uitwerking Er geldt

$$\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}=\frac{1}{6}n\big(n^2+3n+2\big)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Van drie opeenvolgende getallen n, $n+1$ en $n+2$ is er altijd precies één deelbaar door 3. En verder is er ten minste één deelbaar door 2. Dus is het product deelbaar door 6. □

Elk natuurlijk getal groter dan 1 is op een unieke manier te schrijven als product van priemgetallen. Dat noemen we de *priemontbinding* van n. (Daarbij beschouwen we verschillende volgordes van dezelfde priemfactoren als hetzelfde: $6=2\cdot 3$ en $6=3\cdot 2$ stellen dezelfde priemontbinding voor van 6 en dit is dus de unieke priemontbinding van 6.) Zo is bijvoorbeeld $4200=6\cdot 7\cdot 10\cdot 10=(2\cdot 3)\cdot 7\cdot(2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5)=2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$. Het zal vaak handig blijken om ook het getal 1 een unieke priemontbinding te geven, namelijk het product van nul priemgetallen (het lege product).

Voor het gemak kijken we in de volgende opgave naar een getal n met alleen maar een paar kleine priemfactoren. Het is namelijk gegeven dat we n kunnen schrijven als

$$n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f,$$

waarbij de a, b, c, d, e en f gehele exponenten groter dan of gelijk aan 0 zijn. Als alle exponenten nul zijn, leidt het tot het getal $n=1$. Uitgaande van deze priemontbinding van n, blijken we van heel wat andere getallen ook de priemontbinding te kunnen geven.

Opgave 23. *Veronderstel dat* $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$*.*
(a) *Geef de priemfactorontbinding van* $10n$*.*
(b) *Geef de priemfactorontbinding van* $15!n$ *(*$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*).*
(c) *Geef de priemfactorontbinding van* n^2*.*
(d) *Geef de priemfactorontbinding van* $(7n)^8$*.*

Uitwerking **(a)** $10n = 2 \cdot 5 \cdot n = 2^{a+1} \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$;
(b) $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^1$ dus $15!n = 2^{a+11} \cdot 3^{b+6} \cdot 5^{c+3} \cdot 7^{d+2} \cdot 11^{e+1} \cdot 13^{f+1}$;
(c) $n^2 = 2^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 5^{2c} \cdot 7^{2d} \cdot 11^{2e} \cdot 13^{2f}$;
(d) $(7n)^8 = 2^{8a} \cdot 3^{8b} \cdot 5^{8c} \cdot 7^{8d+8} \cdot 11^{8e} \cdot 13^{8f}$; □

Opgave 24. ***Tweede Ronde 2007*** *Bepaal het aantal gehele getallen* a *met* $1 \leq a \leq 100$ *zodat* a^a *het kwadraat van een geheel getal is. (Beredeneer dat je ze allemaal hebt geteld.)*

Uitwerking In de priemontbinding van het kwadraat van een geheel getal komt elke priemfactor een even aantal keren voor. En omgekeerd: als in de ontbinding van een geheel getal elke priemfactor een even aantal keren voorkomt, is het getal het kwadraat van een geheel getal.
We onderscheiden twee gevallen: a even en a oneven.

- Veronderstel a is even, dan $a = 2c$ en $a^a = (2c)^{2c} = (2^c c^c)^2$. In dit geval is a^a dus altijd het kwadraat van een geheel getal.

- Veronderstel a is oneven, dan $a = 2c + 1$ en

  $$a^a = (2c+1)^{2c+1} = (2c+1)^{2c}(2c+1) = \big((2c+1)^c\big)^2(2c+1).$$

  Aangezien $\big((2c+1)^c\big)^2$ een kwadraat is, geldt dat a^a het kwadraat van een geheel getal is precies dan als elke priemfacor van $(2c+1)$ een even aantal keren voorkomt, dus precies dan als $(2c+1)$ zelf het kwadraat van een geheel getal is.

Conclusie: we vinden alle even getallen en alle oneven kwadraten kleiner dan of gelijk aan 100 en dat zijn er $50 + 5 = 55$. □

Opgave 25. ***Tweede Ronde 1971*** *Voor ieder natuurlijk getal* m *definiëren we* $a(m)$ *als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele* n *definiëren we* $S(n)$ *door:*

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(2^n).$$

Druk $S(n)$ *uit in* n*.*

Uitwerking We maken er maar weer eens een tabel bij. Dan krijgen we direct een vermoeden; zie de laatste kolom.

n	$a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(2^n)$	en dat is	$2^n - 1$?
1	$0 + 1$	1	1
2	$0 + 1 + 0 + 2$	3	3
3	$0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3$	7	7
4	$0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 3 + 0 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 4$	15	15

We zien een duidelijk patroon en we kunnen dat zelfs onder woorden proberen te brengen. De oneven getallen hebben geen bijdrage. De even getallen (dat zijn er 2^{n-1}) hebben allemaal een bijdrage van minstens één factor 2, de 2^{n-2} viervouden van nog één, et cetera, tot aan het ene 2^n-voud. Dat zijn er in totaal $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0 = 2^n - 1$. Toch is dit een wat slordig bewijs: we tellen dingen eerst voor het gemak maar één keer, dan sommige dingen nog maar een keer, et cetera. Intuïtief klopt het allemaal wel, maar toch is het mooier om het wiskundig nog even harder te maken.

We gaan nu met inductie bewijzen dat $S(n) = 2^n - 1$. Voor $n = 1$ is het duidelijk, bijvoorbeeld uit de tabel. Stel dat het geldt voor $n = k$, dan weten we dat de getallen $1, 2, 3, \ldots, 2^k$ in totaal $2^k - 1$ priemfactoren 2 bevatten. Laten we nu al deze getallen met 2 vermenigvuldigen. Het is duidelijk dat we er dan 2^k priemfactoren 2 bij krijgen (zoveel getallen staan er immers), dus het aantal priemfactoren 2 in $2, 4, 6, \ldots, 2^{k+1}$ is $(2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Voegen we hier nu nog de oneven getallen bij, dan heeft dat geen invloed op het totaal aan factoren 2, dus we concluderen dat $S(k+1) = 2^{k+1} - 1$. En dat is precies de bewering voor $n = k + 1$. $\square$

Als een natuurlijk getal een 3-voud is, weten we dat het van de vorm $3k$ is voor zekere gehele k en dat het dus de priemfactor 3 moet bevatten (ten minste één maal). Omgekeerd zijn natuurlijk alle getallen die priemfactor 3 bevatten een 3-voud. De positieve 3-vouden zijn dus *precies* de natuurlijke getallen waarbij priemfactor 3 in hun priemontbinding voorkomt. Een zelfde redenering leidt — wegens $50 = 2 \cdot 5^2$ — tot de constatering dat de positieve 50-vouden precies de natuurlijke getallen zijn die priemfactor 2 bevatten (ten minste één keer) en die priemfactor 5 maar liefst (ten minste) 2 keer bevatten. Als je op net zo'n manier naar 6-vouden, 8-vouden, 30-vouden, … kijkt, kom je vast wel uit de volgende oefenopgave.

Bij de vraag of de bewering ook andersom geldt, kun je het óf proberen te bewijzen, óf door middel van een tegenvoorbeeldje laten zien dat het niet zo is. Hoe werkt dat, een **tegenvoorbeeldje**? Iemand beweert bijvoorbeeld dat alle veelvouden van 15 ook deelbaar zijn door 6. Jij vindt van niet en overtuigt hem met een tegenvoorbeeld: "Kijk maar naar het getal 45, dat is wel een veelvoud van 15 (namelijk $3 \cdot 15$) maar het zit niet in de tafel van 6 ($45 = 7\frac{1}{2} \cdot 6$)." Bij tegenvoorbeelden gaat het erom om er één te vinden waarvoor de bewering niet klopt. Hier is dat dus het geval met 45, maar je had ook 15 zelf of 75 ofzo kunnen kiezen. Maar je had niet 60 kunnen kiezen; dat is namelijk toevallig een getal waarvoor de bewering wel klopt: het is een veelvoud van 15 en (toevallig) ook een veelvoud van 6.

Opgave 26. ***(a)*** *Als een geheel getal deelbaar is door 6, is het zeker deelbaar door 2 en ook zeker deelbaar door 3. Geldt dit ook andersom?*
(b) *Als een geheel getal deelbaar is door 8, is het zeker deelbaar door 2 en ook zeker deelbaar door 4. Geldt dit ook andersom?*
(c) *Als een geheel getal deelbaar is door 30, is het zeker deelbaar door 6 en ook zeker deelbaar door 15. Geldt dit ook andersom?*

Uitwerking **(a)** Ja (Als n priemfactor 2 en priemfactor 3 bevat, dan ook factor 6);
(b) Nee (We geven een tegenvoorbeeld: het getal 12 is deelbaar door 2 en bovendien ook door 4. Toch is het niet deelbaar door 8);
(c) Ja (Als je weet dat n de priemfactoren 2 en 3 bevat en je weet bovendien dat n de priemfactoren 3 en 5 bevat, dan bevat n dus de priemfactoren 2, 3 en 5). $\square$

We hebben in het begin van dit hoofdstuk gekeken naar de delers van de getallen 1 tot en met 10. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de delers van 50. Dat zijn precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de delers van 50 zijn $1, 2, 5, 10, 25, 50$. Maar hebben deze delers nog iets met de priemfactorontbinding van 50 (als $2^1 \cdot 5^2$) te maken?

Laten we eens kijken naar zo'n deler van 50, zeg d. Omdat het een deler is, moet er dus een natuurlijk getal k zijn (in feite ook weer een deler) zodat $d \cdot k = 50$. Als we nu van d de priemfactorontbinding weten, zijn we al een eind op weg met het opschrijven van de priemfactorontbinding van 50. Immers, alle priemfactoren van d zitten ook in 50. Zo'n deler moet dus wel van de vorm $2^x \cdot 5^y$ zijn, waarbij x gelijk aan 0 of 1 is en waarbij y gelijk aan 0, 1 of 2 mag zijn. (Daarbij correspondeert de deler 1 met de schrijfwijze $2^0 \cdot 5^0$.) Omgekeerd is elk getal van deze vorm overduidelijk ook een deler van 50. Dus alle delers van 50 zijn precies alle getallen van deze vorm! Voor x zijn er daarbij 2 opties en voor y zijn er 3 opties. Het is dus best logisch dat het getal 50 precies $2 \times 3 = 6$ delers heeft.

Opgave 27. *Welk getal heeft meer delers:* 6^9 *of* 97^{97}*?*

Uitwerking $6^9 = 2^9 \cdot 3^9$ heeft $10 \cdot 10 = 100$ delers; 97^{97} heeft er slechts 98. $\square$

Opgave 28. *Veronderstel dat* $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$*. Hoeveel delers heeft* n*?*

Uitwerking De delers van n zijn van de vorm $d = 2^u \cdot 3^v \cdot 5^w \cdot 7^x \cdot 11^y \cdot 13^z$ met de u, v, w, x, y, z'tjes zodanig dat $0 \leq u \leq a$, et cetera. Dat zijn steeds $(a+1)$, $(b+1)$ et cetera mogelijkheden, dus het aantal delers is $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)(f+1)$. $\square$

Opgave 29. *Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat n^2 een oneven aantal delers heeft.*

Uitwerking Kijk naar de priemfactorisatie: alle exponenten zijn $2e_i$, dus het aantal delers is $(2e_2 + 1)(2e_3 + 1)(2e_5 + 1)(2e_7 + 1) \dots$ en dat is een product van oneven getallen, dus oneven.
Alternatief: als d een deler is van n^2, dan is $\frac{n^2}{d}$ het ook. Dit geeft een paring tussen de delers van n^2. Er is precies een deler die met zichzelf gepaard wordt; dat gebeurt als $d = \frac{n^2}{d}$, dus als $d^2 = n^2$, dus als $d = n$ (we kijken alleen naar de positieve delers). Dus op eentje na komen alle delers in koppeltjes voor; dan zijn er dus een oneven aantal delers. $\square$

In de volgende opgaven kun je de technieken uit dit hoofdstuk verder toepassen.

Opgave 30. *Bekijk de eerste 7 waarden van de functie $f(n) = 41 + n(1 + n)$ (dus vul in $n = 1, \dots, 7$). Ga na dat er steeds een priemgetal uit komt. Hoe zit dat vanaf $n = 8$? Kun je concluderen dat er voor alle natuurlijke getallen n een priemgetal uit komt?*

Uitwerking De waarden $f(1), \dots, f(39)$ blijken allemaal priem te zijn:

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$	$f(11)$	$f(12)$	$f(13)$
43	47	53	61	71	83	97	113	131	151	173	197	223

$f(14)$	$f(15)$	$f(16)$	$f(17)$	$f(18)$	$f(19)$	$f(20)$	$f(21)$	$f(22)$	$f(23)$	$f(24)$	$f(25)$	$f(26)$
251	281	313	347	383	421	461	503	547	593	641	691	743

$f(27)$	$f(28)$	$f(29)$	$f(30)$	$f(31)$	$f(32)$	$f(33)$	$f(34)$	$f(35)$	$f(36)$	$f(37)$	$f(38)$	$f(39)$
797	853	911	971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601

Dus je zou misschien denken dat deze functie alleen maar priemgetallen als waarden aanneemt. Toch kun je al voelen aankomen dat het bij $n = 40$ (en $n = 41$) wel mis moet gaan:

$$f(40) = 41 + 40 \cdot 41 = 1 \cdot 41 + 40 \cdot 41 = (1 + 40) \cdot 41 = 41^2 \text{ dus is niet priem}$$
$$f(41) = 41 + 41 \cdot 42 = 41 \cdot 1 + 41 \cdot 42 = 41 \cdot (1 + 42) = 41 \cdot 43 \text{ dus is niet priem}$$

Het blijft opvallend dat het bij de $n = 40$ pas voor het eerst mis gaat. $\square$

Opgave 31. *Bewijs dat er 100 opeenvolgende natuurlijke getallen zijn die allemaal samengesteld zijn.*

Uitwerking Kijk naar $101!+2, 101!+3, \dots, 101!+101$. Deze getallen zijn achtereenvolgens deelbaar door $2, 3, 4, \dots, 101$ dus het zijn 100 opeenvolgende getallen die stuk voor stuk samengesteld zijn. $\square$

Opgave 32. *Laat p en q priemgetallen zijn met $p > 3$ en $q = p + 2$. Bewijs dat $p + q$ deelbaar is door 12.*

Uitwerking Omdat $p > 3$, is p geen 3-voud. Zou p een 3-voud plus 1 zijn, dan zou q een 3-voud zijn; maar een 3-voud groter dan 3 kan nooit priem zijn, tegenspraak. Dus p is een 3-voud plus 2. Maar dan is q een 3-voud plus 4. Samen geldt dus dat $p + q$ een 3-voud plus 6 is, oftewel een 3-voud. Verder is $p + q$ de als som van twee opeenvolgende oneven getallen een 4-voud (want $(4k + 1) + (4k + 3) = 8k + 4 = 4(2k + 1)$ en $(4k + 3) + (4k + 5) = 8k + 8 = 4(2k + 2)$). Dus $p + q$ is een 12-voud. $\square$

Katern 2

Getaltheorie

4 Delers

In Katern 1 heb je geleerd wat een *deler* van een getal is. Zo zijn bijvoorbeeld 1, 2, 5, 10, 25 en 50 de delers van het getal 50: precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is. De *priemdelers* of *priemfactoren* van 50 zijn 2 en 5 (waarbij 5 twee keer voorkomt). Dat zijn de delers van 50 die ook een priemgetal zijn. We gaan nu kijken naar wat meer eigenschappen van delers en priemfactoren.

Als het natuurlijke getal a een deler is van n, dan is er een natuurlijk getal b zo dat geldt $ab = n$. Je kunt dat getal b vinden door n te delen door a. Andersom geldt dat als $ab = n$, dat dan a een deler is van n. We zeggen dat a een deler is van n *precies dan als* er een geheel getal b is met $ab = n$. Dit is een andere manier van kijken naar de delers van een getal, die vaak handig is als je niet met echte getallen werkt maar met letters.

Het getal n hoeft niet per se positief te zijn. We kunnen hetzelfde zeggen voor een negatief geheel getal n en zelfs voor $n = 0$. We spreken af dat de *delers* van een getal wel altijd positief zijn. De delers van -9 zijn dus de positieve gehele getallen 1, 3 en 9, wat precies ook de delers van 9 zijn.

Hoe zit dat nu met $n = 0$? De delers van 0 zijn precies de natuurlijke getallen a waarvoor er een b is met $ab = 0$. Maar dit is waar voor alle natuurlijke getallen a: neem maar $b = 0$. De delers van 0 zijn dus alle natuurlijke getallen.

We zetten nog even wat voorbeelden op een rijtje.

4 is een deler van 12	want $4 \cdot 3 = 12$,
11 is een deler van -33	want $11 \cdot (-3) = -33$,
6 is een deler van -6	want $6 \cdot (-1) = -6$,
13 is een deler van 0	want $13 \cdot 0 = 0$.

Ten slotte spreken we af dat *priemgetallen* altijd positieve getallen zijn. Er zijn ook negatieve getallen met precies twee delers (zoals -3) maar dat noemen we geen priemgetallen.

Stel dat a een deler is van n. Kunnen we nu een veelvoud van n, zeg kn, ook delen door a? Anders gezegd: is a ook een deler van kn? Ja, want er geldt $kn = kab = (kb)a$, dus als we kn delen door a, dan krijgen we kb en dat is weer geheel.

Rekenregel 1. *Als a een deler is van n, dan is a een deler van kn voor alle gehele getallen k.*

Nu draaien we het om. Stel dat a een deler is van kn. Is dan a ook een deler van n? En van k? Of misschien van één van beide? Het antwoord op deze vragen hangt er vanaf of a een priemgetal is of niet. Neem als voorbeeld even $a = 6$. Dat is geen priemgetal, want $6 = 2 \cdot 3$. Als we $k = 4$ en $n = 15$ hebben, dan is $kn = 60$ en dat is deelbaar door 6. Maar 6 is geen deler van 4 en ook niet van 15. Dat komt omdat we 6 kunnen splitsen: de priemfactor 2 van 6 zit in 4, maar niet in 15; en de priemfactor 3 van 6 zit niet in 4, maar juist wel in 15. Daardoor komt het dat 4 en 15 niet deelbaar zijn door 6, maar hun product wel.

Als a een priemgetal is, dan kunnen we a niet splitsen zoals we hierboven met 6 deden. In dat geval moet a een deler zijn van n of van k of zelfs van allebei. Dit kunnen we bewijzen. Bekijk hiervoor de priemontbinding van n en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Bekijk ook de priemontbinding van k en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen $q_1, q_2, \ldots, q_r$. De priemfactoren die dan in kn voorkomen zijn $p_1, p_2, \ldots, p_t, q_1, q_2, \ldots, q_r$, waarbij er misschien nog dubbele zitten als een p'tje gelijk is aan een q'tje. In elk geval kan een priemgetal dat niet tussen de p'tjes en q'tjes zit, ook niet voorkomen in de priemontbinding van kn. Als a nu een priemgetal is dat een deler is van kn, dan moet a voorkomen in de priemontbinding van kn. Dus a is gelijk aan één van de p'tjes of q'tjes. Als $a = p_i$ voor een of andere i, dan is a een deler van n. En als $a = q_j$ voor een of andere j, dan is a een deler van k. Dus a is een deler van minstens één van k en n.

Rekenregel 2. *Als a een priemdeler is van kn, dan is a een deler van k of van n.*

Voorbeeld 9. *Laat p een priemgetal zijn. Vind alle natuurlijke getallen a waarvoor p een deler is van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.*

Oplossing Als $a \geq p$, dan komt p voor in het product $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Dus dan is p zeker een deler van dat product. Wat gebeurt er als $a < p$? Dan kan dat product nog steeds wel erg groot zijn, groter dan p. Toch kan p er geen deler van zijn. Om dit te laten zien, gebruiken we rekenregel 2. Stel namelijk dat p wel een deler is van het product. Dan is p een deler van minstens één van de a factoren, zeg van de factor b. Alle factoren die voorkomen in het product, zijn kleiner dan of gelijk aan a, dus ook $b \leq a$. Verder hadden we aangenomen $a < p$, dus $b < p$. Maar dan kan p natuurlijk geen deler zijn van b: de positieve getallen waar p deelbaar door is, zijn p, $2p$, $3p$, enzovoorts, maar geen getallen kleiner dan p. Kortom, dit kan niet. Dus p is geen deler van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ als $a < p$.

We concluderen dat de gezochte natuurlijke getallen a precies de natuurlijke getallen met $a \geq p$ zijn. $\square$

De redenering hierboven gaat niet op als p geen priemgetal is. Dan mogen we rekenregel 2 namelijk niet toepassen. Onze conclusie is dan ook verkeerd, zoals we met een tegenvoorbeeld kunnen laten zien. Neem bijvoorbeeld $p = 6$ (geen priemgetal). Als het bovenstaande voorbeeld ook waar zou zijn voor niet-priemgetallen, dan zou het product alleen deelbaar zijn door 6 als $a \geq 6$. Als we echter $a = 4$, kiezen, dan is het product $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ en dat is toch deelbaar door 6. Dus als p niet priem is, dan kan ook voor getallen a die kleiner zijn dan p, gelden dat p een deler is van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Met voorbeeld 9 in ons achterhoofd, kunnen we ook bewijzen dat als p priem is, p^2 nooit een deler kan zijn van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ als $a \leq p$. Voor $a < p$ is dat logisch, want als p al geen deler is van het product, dan is p^2 al helemaal geen deler. Wat gebeurt er als $a = p$? We kunnen niet direct weer rekenregel 2 toepassen, want p^2 is niet priem. We zien wel dat er een factor p zit in het product (namelijk de factor a, want we hadden $a = p$ genomen). Deze kunnen we wegstrepen tegen één factor p in p^2. Daaruit volgt dat p een deler moet zijn van $(a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. We wisten al uit voorbeeld 9 dat dit niet waar is, want $a - 1 < p$.

Bij het wegstrepen van een factor p gebruiken we eigenlijk een nieuwe rekenregel. Laten we die nog even in het algemeen opschrijven.

Rekenregel 3. *Laat a, b en c natuurlijke getallen zijn. Als ab een deler is van ac, dan is b een deler van c.*

Het bewijs is eenvoudig: als ab een deler is van ac, dan is er een geheel getal d zodat $d \cdot ab = ac$. Omdat a een natuurlijk getal is en dus nooit nul, mogen we a links en rechts wegdelen. Dus geldt $d \cdot b = c$ en dat betekent precies weer dat b een deler is van c.

Laten we eens kijken wat er gebeurt als we twee getallen optellen. Stel dat we bijvoorbeeld twee even getallen optellen. Dan komt daar weer een even getal uit. Als we een even en een oneven getal bij elkaar optellen, dan komt er juist een oneven getal uit. Een even getal is natuurlijk niets anders dan een getal dat deelbaar is door 2; een oneven getal is juist niet deelbaar door 2. Kunnen we 2 nu vervangen door een willekeurig getal? Stel dat we twee getallen optellen die allebei deelbaar zijn door a. Is het resultaat dan deelbaar door

a? En wat als we een getal dat deelbaar is door a optellen bij een getal dat niet deelbaar is door a?

Eerst maar eens twee getallen die deelbaar zijn door a, zeg ak en al. Als we die optellen, krijgen we $ak + al = a(k + l)$ en dat is weer deelbaar door a. Natuurlijk geldt hetzelfde als we het ene getal van het andere aftrekken: $ak - al = a(k - l)$. Dat is ook weer deelbaar door a.

Stel nu dat we ak optellen bij een getal n dat niet deelbaar is door a. Noem de uitkomst l. Dan geldt $l - ak = n$. Dus als l deelbaar is door a, dan is (volgens wat we net hebben bewezen) n ook deelbaar door a. Maar we hadden juist gezegd dat n niet deelbaar was door a. Conclusie: l is ook niet deelbaar door a. Hetzelfde geldt als we ak juist aftrekken van een getal n dat niet deelbaar is door a: dan is de uitkomst ook niet deelbaar door a.

Rekenregel 4. *Als a een deler is van m en van n, dan is a een deler van $m + n$ en ook van $m - n$. Als a wel een deler is van m, maar niet van n, dan is a geen deler van $m + n$ en ook niet van $m - n$.*
We kunnen dit ook als volgt samenvatten. Stel a is een deler van m. Dan is a een deler van n precies dan als a een deler is van $m + n$. En a is een deler van n precies dan als a een deler is van $m - n$.

Voorbeeld 10. *Bewijs dat er geen priemgetallen p, q en r bestaan zodat $p^2 + q^2 = r^2$.*

Oplossing We gaan eerst eens even wat priemgetallen invullen om te kijken wat er gebeurt. We maken een tabel van de waarden van $p^2 + q^2$ voor verschillende priemgetallen p en q:

	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 7$
$p = 2$	8	13	29	53
$p = 3$	13	18	34	58
$p = 5$	29	34	50	74
$p = 7$	53	58	74	98

Dit zijn inderdaad allemaal geen kwadraten van priemgetallen. Wat opvalt is dat veel waarden even zijn. Dat is logisch: als je de kwadraten van twee oneven priemgetallen bij elkaar optelt, dan wordt de uitkomst even. Maar ook wordt de uitkomst dan minstens $3^2 + 3^2 = 18$, terwijl het slechts 4 mag zijn als r een even priemgetal is. Dus we kunnen het geval dat p en q allebei oneven zijn, uitsluiten. Als p en q allebei even zijn, dan zijn ze allebei gelijk aan 2 en we zien al in de tabel dat dat ook niet kan. Dus we hoeven nu alleen nog maar te kijken naar het geval dat precies één van p en q even is en de ander oneven. Laten we zeggen dat $q = 2$, terwijl p juist oneven is. Dan is r ook oneven.

Nu gaan we de vergelijking op een handige manier anders schrijven. Er geldt

$$p^2 = r^2 - q^2 = r^2 - 2^2 = (r - 2)(r + 2).$$

Volgens rekenregel 2 is p een deler van minstens één van $r - 2$ en $r + 2$. Als ze allebei deelbaar zijn door p, dan is p volgens rekenregel 4 ook een deler van $(r + 2) - (r - 2)$ en dat is gelijk aan 4. Maar p is oneven en 4 heeft geen oneven priemdelers, dus dit kan niet. Omdat $(r-2)(r+2) = p^2$, mag $(r-2)(r+2)$ alleen priemfactoren p bevatten, maar de twee factoren mogen dus niet allebei deelbaar zijn door p. Aangezien $r+2$ groter is dan $r-2$, moet nu gelden $r-2 = 1$ en $r+2 = p^2$. Maar dat betekent $r = 3$ en $p^2 = 5$. Echter, 5 is geen kwadraat. Dus ook dit kan niet.

We hebben nu laten zien dat er geen enkele mogelijkheid is waarop voor drie priemgetallen p, q en r kan gelden $p^2 + q^2 = r^2$. □

Voorbeeld 11. *Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor $3n^2 + n - 2$ een deler is van $n^3 + 3$.*

Oplossing Als je eens wat verschillende getallen n invult en daarvoor $3n^2+n-2$ uitrekent, dan valt het je misschien op dat dit getal steeds deelbaar is door $n+1$. Inderdaad blijken we $3n^2 + n - 2$ te kunnen ontbinden als $(n+1)(3n-2)$. Als $3n^2 + n - 2$ een deler is van $n^3 + 3$, dan is dus in elk geval ook $n+1$ een deler van $n^3 + 3$. We gaan nu eerst maar eens proberen om alle natuurlijke getallen n te vinden waarvoor $n+1$ een delers is van $n^3 + 3$.

We willen rekenregel 4 toepassen op $n^3 + 3$ om andere uitdrukkingen te vinden waar $n+1$ ook een deler van is. Hiervoor maken we geschikte veelvouden van $n+1$. Om te beginnen is $n^2(n+1) = n^3 + n^2$ deelbaar door $n+1$. Met behulp van rekenregel 4 vinden we dan dat $n+1$ een deler is van $(n^3 + n^2) - (n^3 + 3) = n^2 - 3$. Nu kijken we naar $n(n+1) = n^2 + n$, waar $n+1$ natuurlijk een deler van is. Met rekenregel 4 volgt hieruit dat $n+1$ een deler is van $(n^2 + n) - (n^2 - 3) = n + 3$. Nog een keertje rekenregel 4 toepassen vertelt ons dat $n+1$ een deler is van $(n+3) - (n+1) = 2$.

Nu heeft 2 slechts twee delers, namelijk 1 en 2. Dus $n+1 = 1$ of $n+1 = 2$. Daaruit volgt $n = 0$ of $n = 1$, maar n moet een natuurlijk getal zijn, dus $n = 0$ valt af. De enige kandidaat is dus $n = 1$. We moeten nog even controleren of dit inderdaad een oplossing is: het zou immers ook best kunnen dat er helemaal geen oplossingen zijn. Dus we vullen $n = 1$ nog even in: $3n^2 + n - 2 = 2$ en $n^3 + 3 = 4$, dus $3n^2 + n - 2$ is inderdaad een deler van $n^3 + 3$. We hebben dus precies één oplossing gevonden en dat is $n = 1$. □

Opgave 33. *Laat n een geheel getal zijn. Bewijs dat een deler van n groter dan 1 nooit een deler is van $n+1$.*

Uitwerking Stel dat voor een natuurlijk getal d geldt dat d een deler is van n en van $n+1$. Dan is d volgens rekenregel 4 ook een deler van $(n+1) - n = 1$. De enige deler van 1 is 1, dus $d = 1$. De delers van n die groter zijn dan 1, kunnen dus nooit ook een deler van $n+1$ zijn. □

Opgave 34. *Voor welke natuurlijke getallen a geldt dat $a+1$ een deler is van $a^2 - a + 1$?*

Uitwerking Stel $a+1$ is een deler van a^2-a+1. Omdat $a+1$ een deler is van $a(a+1) = a^2+a$, geldt dan volgens rekenregel 4 dat $a+1$ een deler is van $(a^2+a)-(a^2-a+1) = 2a-1$. Verder is $a+1$ een deler van $2(a+1) = 2a+2$, dus met behulp van rekenregel 4 zien we nu dat $a+1$ een deler is van $(2a+2)-(2a-1) = 3$. Dus $a+1 = 1$ of $a+1 = 3$. Het eerste kan niet, want a is een natuurlijk getal. Het tweede betekent dat $a = 2$. We controleren of dit daadwerkelijk een oplossing is: $a^2-a+1 = 3$ en $a+1 = 3$, dus $a+1$ is een deler van a^2-a+1. De enige oplossing is dus $a = 2$. □

Opgave 35. *Laat k een natuurlijk getal zijn zodat 15 een deler is van $(3k+2)(5k+2)$. Bewijs dat 3 een deler is van $k+1$ en 5 een deler van $k-1$.*

Uitwerking Omdat 3 een deler is van 15, is 3 een deler van $(3k+2)(5k+2)$. Volgens rekenregel 2 is 3 nu een deler van $3k+2$ of van $5k+2$, want 3 is een priemgetal. Maar rekenregel 4 vertelt ons dat $3k+2$ niet deelbaar is door 3 (want $3k$ is deelbaar door 3 en 2 is dat juist niet), dus 3 moet een deler zijn van $5k+2$. Omdat 3 ook een deler is van $3(2k+1) = 6k+3$, is volgens rekenregel 4 nu 3 ook een deler van $(6k+3)-(5k+2) = k+1$.

Op dezelfde manier zien we dat 5 een deler moet zijn van $3k+2$ of $5k+2$ en dat $5k+2$ niet deelbaar is door 5. Dus 5 is een deler van $3k+2$. Met behulp van rekenregel 4 zien we dat 5 een deler moet zijn van $(3k+2)-5 = 3k-3$. Dat is gelijk aan $3(k-1)$. Opnieuw rekenregel 2 toepassen laat zien dat 5 een deler moet zijn van 3 of van $k-1$. Maar 5 is natuurlijk geen deler van 3, dus 5 moet wel een deler zijn van $k-1$. □

Opgave 36. *Stel dat voor gehele getallen a, b, c en d geldt dat $a-c$ een deler is van $ab+cd$. Bewijs dat $a-c$ ook een deler is van $ad+bc$.*

Uitwerking Volgens rekenregel 1 is $a-c$ een deler van $(a-c)d = ad-cd$. Volgens rekenregel 4 is $a-c$ dan ook een deler van $(ab+cd)+(ad-cd) = ab+ad$. Met rekenregel 1 zien we dat $a-c$ een deler is van $(a-c)b = ab-bc$. We passen nu weer rekenregel 4 toe: $a-c$ is ook een deler van $(ab+ad)-(ab-bc) = ad+bc$. Dit is precies wat we moesten bewijzen. □

Opgave 37. *Vind alle paren priemgetallen p en q waarvoor $p^2-2q^2 = 1$.*

Uitwerking We herschrijven de vergelijking als $(p-1)(p+1) = 2q^2$. Van de twee factoren links moet er minstens één even zijn, omdat de rechterkant ook even is. Dus p is oneven. Daaruit volgt dat allebei de factoren links even zijn, zodat 4 een deler is van $2q^2$. Met rekenregel 3 zien we dat 2 nu een deler is van q^2, dus dat q even is. Omdat q ook een priemgetal is, geldt $q = 2$. Dus $p^2 = 2q^2+1 = 9$, waaruit volgt $p = 3$. Dit is dus de enige oplossing. □

Opgave 38. ***Tweede Ronde 2001*** *Gegeven is de functie* $f(x) = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 13x + 10}{2x^2 - 9x}$.
Bepaal alle positieve gehele getallen x *waarvoor* $f(x)$ *een geheel getal is.*

Uitwerking Als voor zekere x geldt dat $f(x)$ een geheel getal is, dan moet $2x^2 - 9x$ of $-2x^2 + 9x$ een deler zijn van $2x^3 - 6x^2 + 13x + 10$. Omdat x een deler is van $2x^2 - 9x = x(2x - 9)$ en natuurlijk ook van $-2x^2 + 9x$, moet x in elk geval ook een deler zijn van $2x^3 - 6x^2 + 13x + 10$. Maar x is een deler van $2x^3 - 6x^2 + 13x$, dus volgens rekenregel 4 moet x een deler zijn van 10. Dat geeft vier mogelijkheden voor x: 1, 2, 5 en 10. We vullen ze allevier nog even in om te kijken welke van deze vier daadwerkelijke een geheel getal geven voor $f(x)$: $f(1) = \frac{19}{-7}$ is niet geheel, $f(2) = \frac{28}{-10}$ is niet geheel, $f(5) = \frac{175}{5} = 35$ is wel geheel, $f(10) = \frac{1540}{110} = 14$ is wel geheel. De oplossingen zijn dus $x = 5$ en $x = 10$. □

Opgave 39. ***Tweede Ronde 2006*** *Er geldt* $1+2+3+4+5+6 = 6+7+8$. *Wat is het kleinste getal* k *groter dan 6 waarvoor geldt*
$1 + 2 + \cdots + k = k + (k + 1) + \cdots + n$, *met* n *een geheel getal groter dan* k*?*

Uitwerking De linkerkant is gelijk aan $\frac{1}{2}k(k+1)$, de rechterkant aan $\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}k(k-1)$. Dus $n(n+1) = k(k+1)+k(k-1) = 2k^2$. In de priemontbinding van k^2 komt elke priemfactor een even aantal keer voor. Geen enkele priemfactor kan voorkomen in zowel n als $n + 1$ (zie opgave 33), dus in de priemfactorisaties van n en $n+1$ komen alle priemgetallen groter dan 2 ook een even aantal keer voor. De priemfactor 2 komt in precies één van beide een oneven aantal keer voor (en in de andere helemaal niet). Dus de getallen n en $n + 1$ zijn een kwadraat en twee keer een kwadraat. We moeten dus op zoek naar een kwadraat en twee keer een kwadraat die precies één verschillen.

De getallen 8 en 9 voldoen hieraan en corresponderen met het gegeven voorbeeld ($n = 8$, $k = 6$). Door de kwadraten af te lopen en na te gaan of dit getal plus 1 of min 1 twee keer een kwadraat is, vinden we het volgende voorbeeld: 49 en 50. We krijgen $n = 49$ en $k = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35$. □

Opgave 40. ***Tweede Ronde 2004*** *Een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden* a *en* b *en schuine zijde* c *heeft de volgende eigenschappen:* $a = p^m$ *en* $b = q^n$ *met* p *en* q *priemgetallen en* m *en* n *positieve gehele getallen,* $c = 2k + 1$ *met* k *een positief geheel getal.*
Bepaal alle mogelijke waarden van c *en de daarbij horende waarden van* a *en* b.

Uitwerking Volgens de stelling van Pythagoras moet gelden $a^2 + b^2 = c^2$, dus $p^{2m} + q^{2n} = (2k+1)^2$. De rechterkant is oneven, dus precies één van p en q is even en de ander is oneven. Zeg dat p even is en q oneven. Omdat p priem is, moet gelden $p = 2$. We herschrijven de vergelijking als

$$q^{2n} = (2k + 1)^2 - 2^{2m} = (2k + 1 + 2^m)(2k + 1 - 2^m).$$

Als q een deler is van beide factoren rechts, dan is q ook een deler van het verschil (rekenregel 4) en dat is gelijk aan $2 \cdot 2^m$. Maar dat is een tweemacht en die heeft geen oneven priemdelers. Dus q is een deler van slechts één van de twee factoren. Omdat links geen andere priemfactoren dan q voorkomen, moet de andere factor rechts gelijk zijn aan 1. Dat moet wel de kleinste factor zijn. Dus $2k + 1 - 2^m = 1$, oftewel $2k = 2^m$. Verder geldt $2k + 1 + 2^m = q^{2n}$ en dat kunnen we nu herschrijven als $2^{m+1} + 1 = q^{2n}$. Daaruit volgt

$$2^{m+1} = q^{2n} - 1 = (q^n - 1)(q^n + 1),$$

dus zowel $q^n - 1$ als $q^n + 1$ zijn een tweemacht. Er bestaat maar één tweetal tweemachten die precies 2 verschillen, namelijk 2 en 4. Dus $q^n - 1 = 2$ en $q^n + 1 = 4$. Dat geeft $q^n = 3$, dus $n = 1$ en $q = 3$. Nu is $2^{m+1} = 3^2 - 1 = 8$, dus $m = 2$. We vinden $a = 4$, $b = 3$ en $c = 5$. Dat zijn inderdaad de zijden van een rechthoekige driehoek. Er is dus precies één oplossing: $c = 5$ met $a = 4$ en $b = 3$ (of andersom). □

5 Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11

Van grote getallen is het vaak niet makkelijk om de priemontbinding te vinden. Er bestaan wel trucjes om ook van grote getallen te zien of ze deelbaar zijn door bepaalde kleine (priem)getallen. Zo kun je in één oogopslag zien dat het getal 123456 deelbaar is door 2, omdat het laatste cijfer even is. Je kunt ook zien dat 123456 niet deelbaar is door 5: alleen getallen die eindigen op een 5 of een 0 zijn deelbaar door 5. Waarom is dat eigenlijk zo? En kunnen we dit ook voor deelbaarheid door andere getallen?

Een *getal* schrijven we op met *cijfers*. Cijfers zitten altijd tussen de 0 en de 9. Zo is bijvoorbeeld 321 geen cijfer, maar een getal. Het getal 321 bestaat uit de cijfers 3, 2 en 1. En het getal 9 heeft precies één cijfer, namelijk het cijfer 9. We rekenen normaal gesproken met getallen: die kun je optellen, vermenigvuldigen, etc. Met cijfers kun je dat niet zomaar doen: wat is bijvoorbeeld het cijfer 3 opgeteld bij het cijfer 8? Dat is in elk geval geen cijfer! Soms is het toch handig om naar de cijfers van een getal te kijken. Daarvoor gebruiken we speciale notatie. Zo schrijven we $\overline{abc}$ voor het getal dat bestaat uit de cijfers a, b en c. We schrijven hiervoor liever niet abc zonder streep, want dan kan het verward worden met het product van de *getallen* a, b en c.

In het algemeen gebruiken we de notatie $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ voor het getal dat bestaat uit de cijfers a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0. Je weet dat a_0 het aantal eenheden aangeeft, a_1 het aantal tientallen, enzovoorts. Dus in feite geldt

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Zo is $\overline{123456} = 1 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$. Normaal schrijven we dat natuurlijk gewoon als 123456.

We kunnen nu heel makkelijk inzien waarom we alleen naar het laatste cijfer van een getal hoeven te kijken om te bepalen of het deelbaar is door 2 of door 5. Er geldt namelijk

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 0} + a_0 = 10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0.$$

Door rekenregel 4 uit de vorige sectie toe te passen, zien we dat $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ deelbaar is door 2 precies dan als a_0 deelbaar is door 2. En hetzelfde geldt voor 5: het getal $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ is deelbaar door 5 precies dan als a_0 deelbaar is door 5.

Jammer genoeg is nu ook meteen duidelijk dat dit alleen voor delers van 10 werkt en dat zijn alleen 1, 2, 5 en 10. Toch kunnen we met behulp van deze notatie ook een trucje bedenken om te bepalen of een getal deelbaar is door 3.

Kijk nog eens hiernaar:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Al die factoren 10, 100, 1000, etc. zijn niet deelbaar door 3. Dat is jammer: we willen daar graag iets hebben staan dat wel deelbaar is door 3. Dat kunnen we voor elkaar krijgen door overal eentje af te halen: 9, 99, 999, etc. zijn wel allemaal deelbaar door 3. (Immers, $9999 \cdots 999 = 3 \times 3333 \cdots 333$.) Dus laten we ons getal nog een beetje anders schrijven:

$$\begin{aligned}\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &= a_n \cdot (10^n - 1) + a_n + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 \\ &= \big(a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 9\big) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0).\end{aligned}$$

Het linkerstuk is nu deelbaar door 3. Met rekenregel 4 krijgen we: het geheel is deelbaar door 3 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 3. Het rechterstuk is $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ en dat is de som van de cijfers van ons getal. Dus een getal is deelbaar door 3 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.

Nu krijgen we het trucje voor deelbaarheid door 9 cadeau. In die uitdrukking van net is het linkerstuk namelijk niet alleen deelbaar door 3, maar ook door 9. (Want $9999 \cdots 999 = 9 \times 1111 \cdots 111$.) Dus op precies dezelfde maner kunnen we laten zien dat een getal deelbaar is door 9 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 9.

Ten slotte gaan we nog een trucje bedenken voor deelbaarheid door 11. Laten we eerst maar eens kijken naar een getal van drie cijfers. Dat kunnen we schrijven als

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Als we weer 1 afhalen van 100, dan krijgen we 99 en dat is deelbaar door 11. Maar bij 10 lukt dat niet: 9 is niet deelbaar door 11. Gelukkig is $10 + 1$ wel deelbaar door 11. Dus we schrijven ons getal als

$$\overline{cba} = (99c + 11b) + (c - b + a).$$

Nu is het linkerstuk weer deelbaar door 11. Dus het getal is deelbaar door 11 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 11. Hoe ziet dat rechterstuk eruit voor getallen met meer cijfers? Het getal $10^3 - 1 = 999$ is helaas weer niet deelbaar door 11, maar $10^3 + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$ wel. Dus is het handig om een getal van vier cijfers zo te schrijven:

$$\overline{dcba} = (1001d + 99c + 11b) + (-d + c - b + a).$$

Daar begint een patroon in te komen! Het lijkt erop dat je de cijfers van een getal om en om moet optellen en aftrekken; als de uitkomst deelbaar is door 11, dan is het getal zelf deelbaar door 11. Die uitkomst noemen we trouwens de *alternerende* som van de cijfers.

Het belangrijkste ingrediënt van ons vermoeden is dat je bij de machten van 10 de ene keer 1 moet optellen en de andere keer 1 moet aftrekken om een getal deelbaar door 11 te krijgen. Dat gaan we eerst maar eens bewijzen.

We bewijzen eerst met inductie naar n dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n} - 1 = 99$ en dat is deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. We weten dan dat $10^{2k} - 1$ deelbaar is door 11. We gaan dit eens vermenigvuldigen met 100, dan is het nog steeds deelbaar door 11:

$$100 \cdot (10^{2k} - 1) = 100 \cdot 10^{2k} - 100 = 10^{2k+2} - 1 - 99.$$

We passen rekenregel 4 weer toe: 99 is deelbaar door 11 en $100 \cdot (10^{2k} - 1)$ is deelbaar door 11, dus $10^{2k+2} - 1$ is deelbaar door 11. Dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

Nu bewijzen we met inductie naar n dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n-1} + 1 = 11$ en dat is natuurlijk deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geq 1$. We weten dan dat $10^{2k-1} + 1$ deelbaar is door 11. Opnieuw vermenigvuldigen we met 100:

$$100 \cdot (10^{2k-1} + 1) = 100 \cdot 10^{2k-1} + 100 = 10^{2k+1} + 1 + 99.$$

Hier volgt met behulp van rekenregel 4 uit dat $10^{2k+1} + 1$ deelbaar is door 11 en dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

Nu kunnen we bewijzen dat ons trucje met de alternerende som werkt. We doen het eerst voor een getal met een even aantal cijfers: a_{2n-1}, a_{2n-2}, $\ldots$, a_1 en a_0. Er geldt

$$\begin{aligned} \overline{a_{2n-1}a_{2n-2}\ldots a_1a_0} &= a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= \big(a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + a_{2n-2} \cdot (10^{2n-2} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 11\big) \\ &\qquad + (-a_{2n-1} + a_{2n-2} - \cdots - a_1 + a_0). \end{aligned}$$

Het linkerstuk is helemaal deelbaar door 11, dus we concluderen dat het hele getal deelbaar is door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Nu doen we hetzelfde voor een getal met een oneven aantal cijfers:

$$\begin{aligned}\overline{a_{2n}a_{2n-1}\dots a_1a_0} &= a_{2n}\cdot 10^{2n} + a_{2n-1}\cdot 10^{2n-1} + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0\\ &= \big(a_{2n}\cdot(10^{2n}-1) + a_{2n-1}\cdot(10^{2n-1}+1) + \cdots + a_1\cdot 11\big)\\ &\qquad + (a_{2n} - a_{2n-1} + \cdots - a_1 + a_0).\end{aligned}$$

Ook hier zien we dat het linkerstuk deelbaar is door 11, zodat het rechterstuk (de alternerende som van de cijfers) deelbaar is door 11 precies dan als het hele getal deelbaar is door 11.

We zetten alle trucjes nog even op een rijtje.

Laat N een natuurlijk getal zijn.

- N is deelbaar door 2 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 2.
- N is deelbaar door 5 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 5.
- N is deelbaar door 3 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 3.
- N is deelbaar door 9 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 9.
- N is deelbaar door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Bedenk weer even dat 0 deelbaar is door elk natuurlijk getal. Dus als een getal eindigt op een 0, dan is het getal deelbaar door 5. En als de alternerende som van de cijfers gelijk is aan 0, dan is het getal deelbaar door 11.

Voorbeeld 12. *Bepaal de priemontbinding van het getal* $n = 10780$.

Oplossing In elk geval is n deelbaar door 2 en door 5, dus we kunnen het schrijven als $n = 1078 \cdot 2 \cdot 5$. Nu zien we dat er nog een factor 2 in zit: $n = 539 \cdot 2^2 \cdot 5$. De alternerende som van de cijfers van 539 is $5 - 3 + 9 = 11$, wat deelbaar is door 11, dus n is deelbaar door 11. We krijgen $n = 49 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5$. Nu zien we dat de priemontbinding van n gelijk is aan $2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$. □

Voorbeeld 13. *Vind alle natuurlijke getallen* $n \leq 6000$ *waarvoor geldt dat* n *precies 144 keer de som van zijn cijfers is.*

Oplossing We noemen de som van de cijfers van n even $S(n)$. Dan geldt $S(n) \cdot 144 = n$. Nu gaan we onze deelbaarheidstrucjes gebruiken. Het getal 144 is deelbaar door 9 (want

$1 + 4 + 4 = 9$). Dus 9 is een deler van de linkerkant van de vergelijking en daarom ook van de rechterkant, dus 9 is een deler van n. Maar dan is 9 ook een deler van de som van de cijfers van n en die hadden we $S(n)$ genoemd. De linkerkant is dus deelbaar door $9 \cdot 144 = 1296$. Daaruit volgt dat n een veelvoud is van 1296.

Dat wil nog niet zeggen dat voor elk veelvoud n van 1296 geldt: $S(n) \cdot 144 = n$. We hebben alleen nog laten zien dat geen andere getallen dan veelvouden van 1296 kunnen voldoen, maar niet dat al die veelvouden daadwerkelijk voldoen. Gelukkig zijn er slechts enkele veelvouden van 1296 kleiner dan 6000, dus we kunnen ze allemaal even uitproberen. Dit doen we in de volgende tabel.

n	$S(n)$	$S(n) \cdot 144$	is gelijk aan n?
1296	18	2592	nee
2592	18	2592	ja
3888	27	3888	ja
5184	18	2592	nee

We lezen nu gemakkelijk in de tabel af dat er precies twee waarden van n zijn waarvoor geldt $S(n) \cdot 144 = n$, namelijk $n = 2592$ en $n = 3888$. □

Het uitproberen van de vier mogelijkheden hoort echt nog bij het bewijs. Zonder dat tabelletje weten we niet precies welke van de vier getallen voldoen en zijn we dus nog niet klaar met de oplossing. Het is wel belangrijk dat we zeker weten dat dit de enige vier kandidaten zijn, anders zouden we nog veel meer getallen moeten uitproberen. In het eerste deel van het bewijs laten we zien dat er slechts vier kandidaten zijn; daarna maken we het bewijs af door die vier één voor één uit te proberen.

Opgave 41. *Bepaal de priemontbinding van het getal* $n = 30030$.

Uitwerking Met behulp van de trucjes zien we dat n deelbaar is door 2, 3, 5 en 11. Als we al deze factoren eruit delen, houden we 91 over en dat is gelijk aan $7 \cdot 13$. Dus de priemontbinding van n is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. □

Opgave 42. *Bepaal cijfers a en b (met $a \neq 0$) zo dat 72 een deler is van* $\overline{a679b}$.

Uitwerking Omdat 9 een deler is van 72, moet 9 ook een deler zijn van $\overline{a679b}$ en dus van de som van de cijfers van $\overline{a679b}$. Dus 9 moet een deler zijn van $a + 22 + b$. Dat betekent dat $a+b+22 = 27$ (dus $a+b = 5$) of $a+b+22 = 36$ (dus $a+b = 14$). Kleinere veelvouden van 9 vallen af omdat a en b niet negatief kunnen zijn en grotere veelvouden van 9 vallen af omdat $a + b \leq 9 + 9 = 18$.

Verder is $\overline{a679b} = 1000 \cdot \overline{a6} + \overline{79b}$. Omdat 1000 deelbaar is door 8 en $\overline{a679b}$ ook deelbaar moet zijn door 8 (want 8 is een deler van 72), moet $\overline{79b}$ deelbaar zijn door 8. Dat kan alleen als $b = 2$. Daaruit volgt nu meteen $a = 5-2 = 3$ (het geval $a = 14-2 = 12$ valt af). $\square$

Opgave 43. *Vind een getal dat bestaat uit alleen maar enen en dat deelbaar is door 99.*

Uitwerking Het getal bestaande uit 18 enen voldoet: de som van de cijfers is 18 en dus deelbaar door 9; de alternerende som van de cijfers is 0 en dus deelbaar door 11. Hieruit volgt dat het getal deelbaar is door zowel 9 als 11 en dus door 99. $\square$

Opgave 44. *Het getal n bestaat uit precies 300 enen en verder een aantal nullen. Kan n een kwadraat zijn?*

Uitwerking De som van de cijfers van n is 300. Dit is deelbaar door 3, maar niet door 9. Dus n bevat precies één priemfactor 3, terwijl kwadraten altijd van elk priemgetal een even aantal bevatten. Dus n is geen kwadraat. $\square$

Opgave 45. *Vind een getal n met de volgende eigenschap: als je de som van de cijfers van n vermenigvuldigt met 15 en bij de uitkomst 135 optelt, krijg je precies n.*

Uitwerking Noem de som van de cijfers van n even $S(n)$. We zijn op zoek naar een getal n met de eigenschap $S(n) \cdot 15 + 135 = n$. Omdat zowel 15 als 135 deelbaar is door 3, moet n ook deelbaar zijn door 3. Maar dan is $S(n)$ deelbaar door 3, dus is $S(n) \cdot 15$ deelbaar door 9. Omdat ook 135 deelbaar is door 9, volgt hieruit dat n deelbaar is door 9. Dus $S(n)$ is deelbaar door 9. Nu zien we dat $S(n) \cdot 15$ deelbaar is door $9 \cdot 15 = 135$. Uiteraard is 135 ook deelbaar door 135, dus ook n is deelbaar door 135. Door de veelvouden van 135 af te gaan, vind je dat $2 \cdot 135 = 270$ voldoet: de som van de cijfers is 9 en $9 \cdot 15 + 135 = 270$. $\square$

Opgave 46. *Een natuurlijk getal n van vier cijfers heeft de eigenschap dat de cijfers van klein naar groot gesorteerd vier opeenvolgende getallen zijn. Verder is gegeven dat n deelbaar is door 9 en door 11. Vind alle mogelijkheden voor n.*

Uitwerking Noem de cijfers k, $k+1$, $k+2$, $k+3$. We weten dat de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11. Omdat $(k+3)+(k+2)-(k+1)-k = 4$ en $(k+3)+(k+1)-(k+2)-k = 2$ niet deelbaar zijn door 11, moet gelden dat $k+3$ en k het eerste en derde cijfer zijn en $k+2$ en $k+1$ het tweede en vierde cijfer, of net andersom. Verder is $k+(k+1)+(k+2)+(k+3) = 4k+6$ deelbaar door 9. Daaruit zien we dat k deelbaar is door 3, maar niet door 9. Als $k = 6$, dan is $4k+6 = 30$ niet deelbaar door 9. Als $k = 3$, dan geldt $4k+6 = 18$ en dat is inderdaad deelbaar door 9. We hebben nu acht verschillende mogelijkheden voor n: 3465, 6435, 3564, 6534, 4356, 5346, 4653, 5643. $\square$

Opgave 47. ***Tweede Ronde 1997*** *Bij elk positief geheel getal n definiëren we $f(n)$ als het product van de som van de cijfers van n met n zelf. Voorbeelden: $f(19) = (1+9) \cdot 19 = 190$ en $f(97) = (9+7) \cdot 97 = 1552$.*
Toon aan dat er geen getal n bestaat met $f(n) = 19091997$.

Uitwerking Omdat de som van de cijfers van 19091997 deelbaar is door 9, is het getal zelf deelbaar door 9. We vinden $19091997 = 2121333 \cdot 9$. De som van de cijfers van 2121333 is deelbaar door 3, dus het getal zelf is deelbaar door 3. We vinden $19091997 = 707111 \cdot 3^3$. Stel nu dat er een n is zodat $f(n) = 19091997$. Dan is n zelf of de som van de cijfers van n deelbaar door 9, anders kan het product geen drie factoren 3 bevatten. Maar als n deelbaar is door 9, dan is de som van zijn cijfers dat ook. En andersom: als de som van de cijfers van n deelbaar is door 9, dan is n deelbaar door 9. Dus $f(n)$ moet minstens vier factoren 3 bevatten. Maar de som van de cijfers van 707111 is niet deelbaar door 3, dus 19091997 bevat maar drie factoren 3. Tegenspraak. Er bestaat dus niet zo'n n. $\square$

6 Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud

We kijken nog eens naar rekenregel 4. Die zegt dat een deler van m en van n ook een deler is van $m + n$. In andere woorden: als m en n een deler gemeen hebben, dan is dit ook een deler van $m + n$. We weten dat elke twee gehele getallen ten minste één deler gemeen hebben, namelijk 1: dit is een deler van elk geheel getal. Soms is dit de enige deler die de getallen gemeen hebben. Zo heeft 15 bijvoorbeeld als delers 1, 3, 5, en 15, terwijl 8 de delers 1, 2, 4 en 8 heeft. Het enige getal dat bij allebei voorkomt, is 1, dus 1 is de enige deler die 8 en 15 gemeen hebben. De getallen 10 en 15 hebben meer dan één deler gemeen: de delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10 en daarvan zijn 1 en 5 allebei ook een deler van 15. De grootste daarvan is 5. We noemen 5 daarom de *grootste gemene deler* van 10 en 15. Dit korten we ook wel af met *ggd* en soms schrijven we $\text{ggd}(10, 15) = 3$. Zo ook geldt $\text{ggd}(8, 15) = 1$ en $\text{ggd}(8, 10) = 2$.

Terug naar rekenregel 4. We kunnen nu zeggen: de grootste gemene deler van m en n is ook een deler van $m + n$. De grootste gemene deler van m en n is immers een deler van zowel m als n, dus volgens rekenregel 4 ook een deler van $m+n$. Wat is nu $\text{ggd}(m, m+n)$? In elk geval hebben m en $m + n$ al het getal $\text{ggd}(m, n)$ gemeen als deler. Maar misschien hebben ze nog wel een grotere deler gemeen. Noem $\text{ggd}(m, m + n)$ even d. Dan is d dus een deler van m en van $m + n$, dus volgens rekenregel 4 ook van $(m + n) - m = n$. Dus d is een deler van zowel m als n, maar dat betekent dat hij niet groter kan zijn dan $\text{ggd}(m, n)$. Dat was immers de grootste deler die m en n gemeen hadden. Conclusie: $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$.

Rekenregel 5. *Voor gehele getallen m en n geldt:* $\text{ggd}(m, m + n) = \text{ggd}(m, n)$. *En ook:* $\text{ggd}(m, m - n) = \text{ggd}(m, n)$.

Als we de ggd van wat grotere getallen willen weten, dan is het niet zo handig om eerst alle delers op te moeten schrijven. Het is handiger om dan naar de priemontbinding te kijken. Stel bijvoorbeeld dat we de ggd van 36 en 120 willen weten. We kunnen deze getallen gemakkelijk in priemgetallen ontbinden: $36 = 2^2 \cdot 3^2$ en $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. We zien nu direct dat in de ggd van 36 en 120 in elk geval niet de priemfactor 5 mag voorkomen, want dat is geen deler van 36. De priemgetallen 2 en 3 moeten er zeker wel in. En deze factoren mogen niet vaker voorkomen dan dat ze in 36 en 120 voorkomen. Dus de priemfactor 2 mag twee keer voorkomen, want hij komt precies twee keer voor in 36; de priemfactor 3 mag maar één keer voorkomen, want hij komt precies één keer voor in 120. Kortom, de grootste gemene deler van 36 en 120 is $2^2 \cdot 3 = 12$.

Wat er hier precies gebeurt, wordt nog iets duidelijker als we de getallen zo schrijven:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \qquad \text{en} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

We zorgen dus dat in de priemontbinding van beide getallen dezelfde priemgetallen staan. Omdat 5 niet echt een priemdeler is van 36, geven we hem de exponent 0 (bedenk dat 5^0 gelijk is aan 1). Nu kijken we bij elke priemfactor naar de kleinste exponent. Bij de priemfactor 2 is dat 2, bij de priemfactor 3 is dat 1 en bij de priemfactor 5 is dat 0. Dus de ggd is $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5 = 12$. Dit is in feite precies het argument van hierboven, maar dan wat overzichtelijker opgeschreven.

We kunnen nu de getallen opschrijven als het product van de ggd en de overige factoren:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3,$$
$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5.$$

Het stuk tussen haakjes is precies de ggd en is bij allebei de getallen hetzelfde. Buiten de haakjes staan juist bij beide getallen verschillende priemfactoren.

Voorbeeld 14. *Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b. Wat is nu* $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$*?*

Oplossing Laten we dit eerst even uitproberen op ons voorbeeld van hierboven, met $a = 36$ en $b = 120$, zodat $d = 12$. Dan geldt $\frac{a}{d} = 3$ en $\frac{b}{d} = 10$. Die getallen hebben ggd 1. Verder valt het op dat deze getallen precies het product zijn van de priemfactoren die hierboven buiten de haakjes stonden. Dat is natuurlijk geen toeval. Het getal d is precies het product van de priemgetallen binnen de haakjes, dus $\frac{a}{d}$ is het product van de getallen buiten de haakjes. En de eigenschap van de grootste gemene deler van a en b was nou juist dat de getallen buiten de haakjes bij a geen priemfactoren meer gemeen hadden met de getallen buiten de haakjes bij b. Dus $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ moet wel gelijk zijn aan 1.

Dat schrijven we nog een keertje netjes op. We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdeler zou zijn van zowel e als f, dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. □

Een begrip dat een beetje lijkt op de ggd is het *kleinste gemene veelvoud* van twee getallen a en b. Dat is het kleinste natuurlijke getal n dat een veelvoud is van zowel a als b. We korten dit ook wel af tot *kgv* of $\text{kgv}(a, b)$. We kunnen het kgv van twee getallen weer heel makkelijk uit de priemontbinding halen. Laten we nog eens kijken naar 36 en 120. Het kgv van 36 en 120 moet in elk geval een veelvoud worden van $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Het moet natuurlijk ook een veelvoud zijn van $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, dus we moeten de priemfactoren van 36 aanvullen totdat alle priemfactoren van 120 er ook in zitten. Er moet dus een extra 2 bij en nog een 5. Dus $\text{kgv}(36, 120) = 36 \cdot 2 \cdot 5 = 360$. We hadden natuurlijk ook van 120 uit kunnen gaan en daar nog een extra factor 3 aan kunnen toevoegen. Dat geeft gelukkig hetzelfde antwoord: $\text{kgv}(36, 120) = 120 \cdot 3 = 360$.

Ook hier kan het makkelijker zijn om de priemontbindingen even zo op te schrijven dat in beide dezelfde priemgetallen staan:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \qquad \text{en} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

Omdat al deze priemfactoren net zo vaak moeten voorkomen in het kgv als ze in één van beide getallen doen, moeten we nu kijken naar de grootste exponenten. De grootste exponent bij de factor 2 is 3, de grootste exponent bij de factor 3 is 2 en de grootste exponent bij de factor 5 is 1. Dus $\text{kgv}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Voorbeeld 15. *Laat n een natuurlijk getal zijn. Bewijs dat geldt:* $\text{kgv}(n, n+1) = n^2 + n$.

Oplossing We maken eerst eens een tabelletje om te kijken of dit waar is voor wat kleine waarden van n:

n	priemontbinding van n	priemontbinding van $n+1$	$\text{kgv}(n, n+1)$	$n^2 + n$
1	1	2	2	2
2	2	3	6	6
3	3	2^2	12	12
4	2^2	5	20	20
5	5	$2 \cdot 3$	30	30
6	$2 \cdot 3$	7	42	42

We bepalen steeds het kgv door aan de priemontbinding van n de priemfactoren van $n+1$ toe te voegen die nog niet (vaak genoeg) voorkomen. Hier valt het op dat dit steeds alle priemfactoren van $n+1$ zijn. De getallen n en $n+1$ hebben in bovenstaande tabel nooit priemfactoren gemeen. Maar eigenlijk wisten we dat al! Kijk maar eens terug naar opgave 33.

Nu is het makkelijk om het af te maken. Het kgv van n en $n+1$ moet alle priemfactoren van n en $n+1$ bevatten, net zo vaak als ze voorkomen in minstens één van beide. Maar n en $n+1$ hebben geen priemfactoren gemeen, dus we kunnen het kgv vinden door simpelweg n en $n+1$ te vermenigvuldigen. Dat geeft $\operatorname{kgv}(n, n+1) = n(n+1) = n^2 + n$. $\square$

Opgave 48. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n de grootste gemene deler van n^2 en $(n+1)^2$ gelijk is aan 1.*

Uitwerking Stel dat p een priemdeler is van n^2 en $(n+1)^2$. Dan is het ook een priemdeler van n en van $n+1$. Maar n en $n+1$ hebben geen priemdeler gemeen. De grootste gemene deler van n^2 en $(n+1)^2$ bevat daarom geen priemfactoren en moet dus wel gelijk zijn aan 1. $\square$

Opgave 49. *Laat m, n en k gehele getallen zijn. Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(m, n+km) = \operatorname{ggd}(m, n)$.

Uitwerking We passen herhaald rekenregel 5 toe. Als $k > 0$, geldt

$$\operatorname{ggd}(m, n) = \operatorname{ggd}(m, n+m) = \operatorname{ggd}(m, n+2m) = \ldots = \operatorname{ggd}(m, n+km).$$

Als $k < 0$, geldt

$$\operatorname{ggd}(m, n) = \operatorname{ggd}(m, n-m) = \operatorname{ggd}(m, n-2m) = \ldots = \operatorname{ggd}(m, n+km).$$

Als $k = 0$, dan staat er $\operatorname{ggd}(m, n) = \operatorname{ggd}(m, n)$ en dat is natuurlijk ook waar. $\square$

Opgave 50. *Laat a en b gehele getallen zijn zodat* $\operatorname{ggd}(a, b) = 1$. *Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = 1$ *of* $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = 2$.

Uitwerking Volgens rekenregel 5 geldt $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = \operatorname{ggd}(a-b, (a-b)+(a+b)) = \operatorname{ggd}(a-b, 2a)$ en $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = \operatorname{ggd}(a-b, (a+b)-(a-b)) = \operatorname{ggd}(a-b, 2b)$. Dus de grootste gemene deler van $a-b$ en $a+b$ is in elk geval ook een deler van $2a$ en een deler van $2b$. Maar a en b hebben geen delers groter dan 1 gemeen, dus de grootste gemene deler van $2a$ en $2b$ is 2. Dus $\operatorname{ggd}(a-b, a+b)$ kan alleen maar 1 of 2 zijn: dat zijn de enige getallen die ook delers van $2a$ en $2b$ zijn. $\square$

Opgave 51. *Laat n en k gehele getallen zijn. Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(n, 2k+1) = \operatorname{ggd}(2n, 2k+1)$.

Uitwerking De ggd bevat alleen priemfactoren die beide getallen gemeenschappelijk hebben. Omdat $2k+1$ oneven is, hebben $2n$ en $2k+1$ geen factor 2 gemeenschappelijk. Om de ggd van $2n$ en $2k+1$ te bepalen, kunnen we dus net zo goed die factor 2 in $2n$ buiten beschouwing laten. Dan kijken we in feite naar de gemeenschappelijke priemfactoren van n en $2k+1$. Dus $\operatorname{ggd}(n, 2k+1) = \operatorname{ggd}(2n, 2k+1)$. $\square$

Opgave 52. *Laat a en b natuurlijke getallen zijn. Bewijs dat geldt:* $\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b) = a \cdot b$. *Bedenk hiermee een nieuwe oplossing voor voorbeeld 15.*

Uitwerking Net als in voorbeeld 14 noemen we $d = \text{ggd}(a, b)$ en schrijven we $a = d \cdot e$, $b = d \cdot f$. Om de kgv te vinden, gaan we a uitbreiden tot een veelvoud van a dat precies ook alle priemfactoren van b vaak genoeg bevat. De priemfactoren uit de ontbinding van b die nog niet (voldoende vaak) voorkomen in a, vormen samen precies f. Immers, alle priemfactoren van d komen al in a voor en de priemfactoren van f zitten niet ook nog in e, dus die moeten we allemaal nog toevoegen om uit a de kgv van a en b te krijgen. Kortom, $\text{kgv}(a, b) = a \cdot f$. Dus $\text{ggd}(a, b) \cdot \text{kgv}(a, b) = d \cdot a \cdot f = a \cdot b$.

In plaats hiervan kunnen we ook naar de priemontbindingen van a en b kijken. Om de ggd te vinden, moeten we bij elke priemfactor steeds de kleinste exponent kiezen. Om de kgv te vinden, moeten we juist steeds de grootste exponent kiezen. In het ene geval kiezen we dus de exponent die in de priemontbinding van a staat, in het andere geval juist de exponent die in de priemontbinding van b staat. De ene keer is misschien de exponent van a het grootste en die van b het kleinste; de andere keer kan het net andersom zijn. Maar in elk geval kies je ze allebei precies één keer. (Dit geldt ook als beide exponenten toevallig even groot zijn.) Als we nu de ggd en het kgv met elkaar vermenigvuldigen, dan worden de exponenten bij elk priemgetal opgeteld. Dat zijn dus precies de exponenten in de priemontbindingen van a en b. Dus het resultaat is gelijk aan het product van a en b.

Bij voorbeeld 15 geldt $a = n$ en $b = n + 1$. Uit opgave 33 volgt dat $\text{ggd}(n, n + 1) = 1$. Dus $\text{kgv}(n, n + 1) = n \cdot (n + 1) = n^2 + n$. □

Opgave 53. *Definieer een rij natuurlijke getallen a_1, a_2, a_3, ... als volgt: $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = a_n + 2n$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$. Bewijs dat* $\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = 1$ *voor alle natuurlijke getallen n.*

Uitwerking Als je een aantal getallen in de rij uitrekent, dan zie je wellicht dat steeds geldt dat $a_n = n^2 - n + 1$. Dit gaan we met inductie naar n bewijzen.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $a_n = 1$ en $n^2 - n + 1 = 1$, dus dat klopt.

(Inductiestap) Stel nu dat voor zekere $n = k \geq 1$ geldt $a_k = k^2 - k + 1$. Dan kunnen we a_{k+1} berekenen:

$$a_{k+1} = a_k + 2k = (k^2 - k + 1) + 2k = k^2 + k + 1 = (k^2 + 2k + 1) - k = (k + 1)^2 - (k + 1) + 1.$$

Dit is precies onze bewering voor $n = k + 1$. Met inductie hebben we nu aangetoond dat $a_n = n^2 - n + 1$ voor alle natuurlijke getallen n.

Nu gebruiken we rekenregel 5 om $\text{ggd}(a_n, a_{n+1})$ te bepalen:

$$\text{ggd}(a_n, a_{n+1}) = \text{ggd}(a_n, a_n + 2n) = \text{ggd}(a_n, (a_n + 2n) - a_n) = \text{ggd}(a_n, 2n).$$

Bedenk nu dat a_n altijd oneven is: er geldt $a_n = n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ en precies één van n en $n-1$ is even. Dus er geldt (zie opgave 51) dat $\text{ggd}(a_n, 2n) = \text{ggd}(a_n, n)$. Daar passen we nu opgave 49 op toe (met $k = -(n-1)$):

$$\text{ggd}(a_n, n) = \text{ggd}(n^2 - n + 1, n) = \text{ggd}((n^2 - n + 1) - (n-1)n, n) = \text{ggd}(1, n) = 1.$$

Dit voltooit het bewijs. □

Opgave 54. ***Tweede Ronde 1982*** *Definieer* $n = 9^{753}$. *Bepaal* $\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1)$.

Uitwerking We passen opgave 49 toe met $k = -n$. Er geldt

$$\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1) = \text{ggd}(n^2 + 2, (n^3 + 1) - n(n^2 + 2)) = \text{ggd}(n^2 + 2, 1 - 2n).$$

Omdat $1-2n$ oneven is, geldt volgens opgave 51 dat $\text{ggd}(n^2+2, 1-2n) = \text{ggd}(2n^2+4, 1-2n)$. Nu passen we twee keer opgave 49 toe, de eerste keer met $k = n$ en de tweede keer met $k = 2$:

$$\begin{aligned}
\text{ggd}(2n^2 + 4, 1 - 2n) &= \text{ggd}(2n^2 + 4 + n(1 - 2n), 1 - 2n) \\
&= \text{ggd}(n + 4, 1 - 2n) \\
&= \text{ggd}(n + 4, (1 - 2n) + 2(n + 4)) \\
&= \text{ggd}(n + 4, 9).
\end{aligned}$$

Omdat 3 een deler is van $n = 9^{753}$, maar niet van 4, geldt volgens rekenregel 4 dat 3 geen deler is van $n + 4$. Aangezien de enige delers van 9 groter dan 1 ook deelbaar zijn door 3, volgt hieruit $\text{ggd}(n + 4, 9) = 1$. Conclusie: $\text{ggd}(n^2 + 2, n^3 + 1) = 1$. □

Opgave 55. ***Tweede Ronde 1998*** *Van twee positieve gehele getallen m en n is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud gelijk aan* $133866 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 67$. *Het verschil $m - n$ is gelijk aan 189. Bereken m en n.*

Uitwerking Omdat het kgv van m en n precies drie factoren 3 bevat, hebben m en n elk hooguit drie factoren 3 en één van beide moet wel precies drie factoren 3 hebben. Maar omdat $m = n + 189 = n + 3^3 \cdot 7$ heeft de ander dan ook drie factoren 3 (rekenregel 4). We concluderen dat we m en n kunnen schrijven als $m = 27k$ en $n = 27l$. Hierbij geldt $k = l + 7$ en $\text{kgv}(k, l) = 2 \cdot 37 \cdot 67 = 67 \cdot 74 = 4958$. Elk van de priemfactoren (2, 37 en 67) moet in k of l voorkomen. Als zo'n priemfactor in allebei zou voorkomen, dan zou hij ook in $k - l = 7$ voorkomen (rekenregel 4) maar dat kan niet. Dus elke priemfactor komt maar in één van beide voor. Dit geef acht mogelijkheden voor l. We zouden ze even alle acht kunnen langs gaan. Maar we kunnen ook verder rekenen. Voor k vinden we nu twee uitdrukkingen: enerzijds $k = \frac{4958}{l}$ (k krijgt de overgebleven priemfactoren) en anderzijds ook $k = l + 7$. Dus $\frac{4958}{l} = l + 7$, dus $l^2 + 7l - 4958 = 0$. Dat is gewoon een vierkantsvergelijking, dus $l = \frac{-7 \pm \sqrt{19881}}{2} = 67$ (of -74 maar die vervalt). Dan is $k = 67 + 7 = 74$. We concluderen dat $m = 27 \cdot 74 = 1998$ en dat $n = 27 \cdot 67 = 1809$. $\square$

Katern 3

Meetkunde

Inleiding

De vlakke meetkunde is de meetkunde die zich afspeelt in het platte vlak. De hoofdrolspelers van de vlakke meetkunde zijn de punten en de lijnen van driehoeken, vierhoeken of andere veelhoeken. Ook cirkels komen geregeld in een meetkunde-opgave voor. In dit katern bekijken we eerst enkele technieken om te laten zien dat bepaalde hoeken of bepaalde lijnstukken gelijk zijn. Daarna bestuderen we een aantal speciale driehoeken en vierhoeken die allerlei handige eigenschappen hebben. Ten slotte gaan we in op de bijzondere lijnen die elke driehoek bezit, zoals de drie hoogtelijnen of de drie zwaartelijnen. Van twee zwaartelijnen is het best logisch dat ze door één punt gaan, maar hoe bewijs je van de drie zwaartelijnen eigenlijk dat ze door één punt gaan? Zulk soort stellingen komen in het laatste hoofdstuk aan bod.

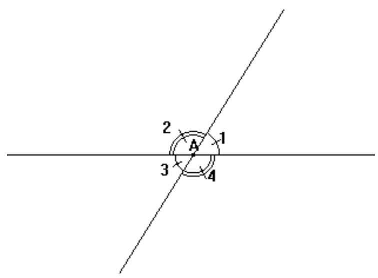
Net als bij de onderwerpen die je in de andere katernen bent tegengekomen, kun je bij meetkundige bewijzen verschillende richtingen in slaan. De ene keer is het handig zelf een punt te definiëren, de andere keer juist een geschikte hulplijn. Bij de eerste voorbeelden in dit katern zul je misschien denken: waar komt dat punt of die lijn nou weer vandaan; die was toch niet gegeven? Maar besef dan dat je alles mag definiëren wat je maar wil, zolang je maar duidelijk omschrijft hoe je dat punt of die lijn hebt gedefiniëerd.

7 Hoeken

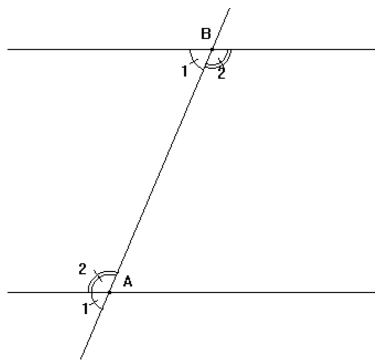
Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze in het snijpunt een *hoek* met elkaar. We meten hoeken in graden en noteren de hoek bij punt A als $\angle A$. Soms is het niet duidelijk welke hoek we precies bedoelen; dan kunnen we een getal (een zogenaamde *index*) toevoegen aan de naam van de hoek. Zo zie je in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ en $\angle A_4$. Deze vier hoeken zijn samen precies 360°, een heel rondje rond. We noemen dat ook wel een *volledige hoek*. De helft hiervan is 180° en dat noemen we een *gestrekte hoek*. In de figuur vormen $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek. Een *rechte hoek* is ten slotte een hoek van precies 90°.

De hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen schrijven we ook wel als $\angle A_{1,2}$. Er geldt dus $\angle A_{1,2} = 180°$ en ook $\angle A_{1,2,3,4} = 360°$.

We kunnen een hoek ook met drie letters noteren: $\angle BAC$ is de hoek die je krijgt als je van punt B naar punt A loopt en daarna van punt A naar punt C. Het gaat dan om de hoek bij punt A. Deze notatie is vooral handig als er meer dan twee lijnen door punt A gaan: dan is het niet meer duidelijk welke hoek je bedoelt met $\angle A$. De notatie $\angle BAC$ geeft dan aan dat het gaat om de hoek bij A tussen de lijnen AB en AC. In figuur 3 bijvoorbeeld wordt met hoek $\angle BAC$ dus hoek $\angle A_2$ bedoeld.



Figuur 1. *Volledige, gestrekte, overstaande hoeken.*



Figuur 2. *F-hoeken en Z-hoeken.*

7.1 Overstaande hoeken

We hadden gezien dat in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek vormen. Oftewel: $\angle A_1 + \angle A_2 = 180°$. Hetzelfde geldt natuurlijk voor $\angle A_2$ en $\angle A_3$: de som daarvan is ook 180°. Dus

$$\angle A_1 = 180° - \angle A_2 = \angle A_3.$$

De hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_3$ zijn dus even groot. In het algemeen zeggen we dat bij twee snijdende lijnen de *overstaande hoeken* gelijk zijn. Dus net zo goed zijn $\angle A_2$ en $\angle A_4$ even groot, want dat zijn ook overstaande hoeken.

7.2 F- en Z-hoeken

In figuur 2 zie je twee evenwijdige lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt, de ene lijn in A en de andere lijn in B. De hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ zijn gelijk. We noemen zulke hoeken bij evenwijdige lijnen ook wel F-hoeken. Er zijn ook Z-hoeken: in de figuur zijn dat $\angle A_2$ en $\angle B_2$. Die hoeken zijn ook even groot.

Je kunt dit ook gebruiken om juist te bewijzen dat twee lijnen evenwijdig zijn. Stel je dat een plaatje hebt zoals in figuur 2, maar je weet nog niet dat de twee lijnen evenwijdig zijn. Als je dan kunt bewijzen dat de F-hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ gelijk zijn of juist de Z-hoeken $\angle A_2$ en $\angle B_2$, dan volgt daaruit dat de lijnen evenwijdig zijn.

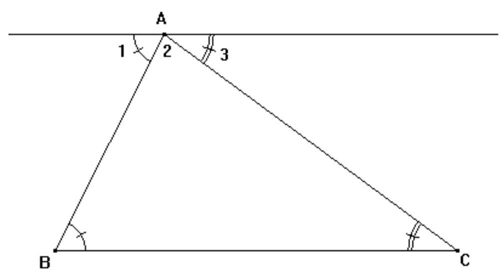
Als de lijnen k en ℓ evenwijdig zijn, dan noteren we dat trouwens met $k \parallel \ell$.

7.3 Hoekensom

Verder is er nog een heel belangrijk resultaat over hoeken in een driehoek.

Stelling 7.3.1 (Hoekensom in een driehoek). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt dat $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.*

Bewijs Trek een lijn evenwijdig aan BC door A, zoals in figuur 3. (Dit is zo'n voorbeeld van zelf een handige hulplijn trekken, zoals in de inleiding werd genoemd.) Dan geldt $\angle B = \angle A_1$ en $\angle C = \angle A_3$ wegens Z-hoeken. Bovendien is $\angle A_{1,2,3}$ een gestrekte hoek. Dus $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_2 + \angle A_1 + \angle A_3 = \angle A_{1,2,3} = 180°$. □



Figuur 3. *Ondersteuning bij het bewijs van stelling 7.3.1.*

7.4 Opgaven

Opgave 56 (U-hoeken)**.** *Laat A, B, X en Y vier punten zijn zodat X en Y aan dezelfde kant van lijn AB liggen.*
(i) Stel dat $AX \parallel BY$. Bewijs dat $\angle XAB + \angle YBA = 180°$.
(ii) Stel dat $\angle XAB + \angle YBA = 180°$. Bewijs dat $AX \parallel BY$.

Uitwerking Laat Z een punt op AX zijn aan de andere kant van AB dan X. Dan vormen $\angle XAB$ en $\angle BAZ$ samen een gestrekte hoek, dus $\angle XAB + \angle BAZ = 180°$. Nu geldt wegens Z-hoeken dat AX evenwijdig is aan BY precies dan als $\angle BAZ = \angle YBA$, dus precies dan als $\angle XAB + \angle YBA = 180°$. □

Opgave 57. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met D een punt op zijde AC en E een punt op zijde BC. Laat F het punt binnen de driehoek zijn zodat AF de hoek $\angle DAE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EAF = \angle DAF$) en BF de hoek $\angle DBE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EBF = \angle DBF$). Bewijs dat $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.*

Uitwerking De som van de hoeken van driehoek $\triangle ABD$ is 180 graden, dus

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180°.$$

We kunnen hoek $\angle DAB$ splitsen in drie stukken: $\angle BAE$, $\angle EAF$ en $\angle DAF$. Dus geldt

$$\angle ABD + \angle ADB + \angle BAE + \angle EAF + \angle DAF = 180°.$$

We doen nu hetzelfde met driehoek $\triangle ABE$; hierbij splitsen we juist hoek $\angle ABE$:

$$\angle BAE + \angle AEB + \angle ABD + \angle DBF + \angle EBF = 180°.$$

Ook in driehoek $\triangle ABF$ zijn de hoeken samen 180 graden. Nu splitsen we de hoeken $\angle BAF$ en $\angle ABF$ beide in twee stukken:

$$\angle AFB + \angle BAE + \angle EAF + \angle ABD + \angle DBF = 180°.$$

De hoeken $\angle ABD$ en $\angle BAE$ komen steeds voor. We kunnen die dus wegstrepen en concluderen dat

$$\angle ADB + \angle EAF + \angle DAF = \angle AEB + \angle DBF + \angle EBF = \angle AFB + \angle EAF + \angle DBF.$$

Daaruit volgt

$$\angle ADB + \angle EAF + \angle DAF + \angle AEB + \angle DBF + \angle EBF = 2(\angle AFB + \angle EAF + \angle DBF).$$

Omdat $\angle DAF = \angle EAF$, kunnen we links $\angle EAF + \angle DAF$ wegstrepen tegen $2\angle EAF$ rechts. Omdat $\angle DBF = \angle EBF$, kunnen we links $\angle DBF + \angle EBF$ wegstrepen tegen $2\angle DBF$ rechts. We houden over

$$\angle ADB + \angle AEB = 2\angle AFB$$

en dat is wat we wilden bewijzen. □

8 Congruentie en gelijkvormigheid

Laten we eens kijken naar de mogelijkheden om twee driehoeken met elkaar te vergelijken.

8.1 Congruentie

Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. Als je deze driehoek oppakt en een stukje verschuift, draait en misschien een keertje spiegelt, dan krijg je een nieuwe driehoek $\triangle DEF$ die eigenlijk in heel veel opzichten hetzelfde is als $\triangle ABC$. De twee driehoeken hebben precies dezelfde vorm en grootte, alleen liggen ze op een andere plek in je tekening. In de wiskunde noemen we zulke driehoeken *congruent*.

Voor congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \qquad \angle B = \angle E, \qquad \angle C = \angle F,$$

$$|AB| = |DE|, \qquad |BC| = |EF| \qquad \text{en} \qquad |AC| = |DF|.$$

Sommige van deze gelijkheden kun je uit de andere afleiden. Als je bijvoorbeeld weet dat $\angle A = \angle D$ en $\angle B = \angle E$, dan volgt daaruit dat $\angle C = \angle F$, omdat de som van de hoeken in beide driehoeken 180° is. Zo zijn twee driehoeken congruent als ze overeenkomstig hebben:

1. drie zijden (ZZZ),
2. twee zijden met de ingesloten hoek (ZHZ),
3. twee zijden en een rechte hoek (ZZR),
4. twee hoeken met de ingesloten zijde (HZH),
5. twee hoeken met een niet-ingesloten zijde (HHZ).

De drie letters achter de gevallen zijn korte "codes" om makkelijk aan te geven door welk geval een paar driehoeken congruent zijn. De *ingesloten hoek* bij het tweede geval betekent dat de hoek die je weet, precies in ligt tussen de twee zijdes die je weet. Bijvoorbeeld: als $\angle A = \angle D$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$, dan zijn driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ congruent wegens het geval ZHZ: $\angle A$ is de hoek die ingesloten is tussen de zijden AB en AC. Echter, als je in plaats van $\angle A = \angle D$ hebt dat $\angle B = \angle E$, dan wil dat nog niet zeggen dat de driehoeken congruent zijn (zie ook opgave 58). De hoek die je dan weet, is nu niet de ingesloten hoek tussen de twee zijden die je weet, dus je zou in geval ZZH zitten, maar die staat niet in bovenstaand lijstje. Is de hoek $\angle B = \angle E$ echter recht, dan heb je toch congruente driehoeken, op grond van ZZR.

Als twee driehoeken congruent zijn, dan noteren we dat als $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Vaak zetten we er dan tussen haakjes de "code" van het congruentiegeval achter, bijvoorbeeld (ZHZ). Let bij het opschrijven van een congruentie goed op de volgorde van de hoekpunten van de driehoeken! De volgorde moet zo zijn dat de hoeken bij de eerst genoemde hoekpunten, A en D, gelijk zijn; en zo ook voor het paar B en E en het paar C en F. Op die manier kun je meteen zien welke zijden er gelijk zijn: de zijden gevormd door de eerste twee letters links en rechts zijn gelijk, net als de zijden gevormd door de laatste twee letters en de zijden gevormd door de eerste en laatste letters.

Als je eenmaal weet dat vanwege een van de gevallen hierboven twee driehoeken congruent zijn, dan volgt daaruit dat de drie paren hoeken en de drie paren zijden allemaal gelijk zijn. Dat geeft je dus weer nieuwe informatie. Dit is een manier om te bewijzen dat twee hoeken of twee zijden gelijk zijn.

Voorbeeld 16. *Bekijk een lijnstuk AB en twee punten C en D aan dezelfde kant van AB zodat $\angle CAB = \angle DBA$ en $\angle CBA = \angle DAB$. Bewijs dat $|BC| = |AD|$.*

Oplossing We hebben al twee paren gelijke hoeken. De hoeken $\angle CAB$ en $\angle CBA$ zitten in driehoek $\triangle ABC$, terwijl de hoeken $\angle DBA$ en $\angle DAB$ in driehoek $\triangle ABD$ zitten. We zien dat hoek $\angle A$ in driehoek $\triangle ABC$ gelijk is aan hoek $\angle B$ in driehoek $\triangle ABD$ en andersom. Als deze driehoeken congruent zijn, dan geldt in de goede volgorde dus $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Om dit te bewijzen kiezen we congruentiegeval 4 hierboven: HZH. We hebben de twee hoeken al. De ingesloten zijde is in de ene driehoek AB en in de andere BA. Deze zijn natuurlijk even lang. Dus wegens HZH geldt $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Hieruit volgt $|BC| = |AD|$.
□

8.2 Gelijkvormigheid

Zoals we hierboven hebben gezien, hebben twee congruente driehoeken precies dezelfde vorm en grootte. De ene driehoek is als het ware een kopie van de ander, die op een andere plek in je tekening neergelegd is. Wat nou als we een driehoek zouden kopiëren en daarbij met een bepaalde factor zouden vergroten of verkleinen? De vorm van de driehoek verandert dan niet, maar de grootte wel. Anders gezegd: de hoeken blijven gelijk en de verhoudingen tussen de lengtes van de zijden ook, maar de lengtes van de zijden zelf veranderen. Dit noemen we gelijkvormigheid en noteren we met $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Let ook hier altijd weer goed op de volgorde. Voor gelijkvormige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \qquad \angle B = \angle E, \qquad \angle C = \angle F$$

en

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Net als bij congruentie, heb je niet al deze gegevens nodig om te kunnen concluderen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Als je bijvoorbeeld weet dat $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ en ook nog dat de hoeken die door deze zijden worden ingesloten gelijk zijn (dus $\angle B = \angle E$) dan volgt daar al uit dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn. Dat is het tweede geval van de gelijkvormigheidsgevallen hieronder:

1. de verhoudingen van de drie paren zijden (zzz),
2. de verhoudingen van twee paar zijden en de ingesloten hoek (zhz),
3. de verhouding van twee paar zijden en een rechte hoek (zzr),
4. twee hoeken (hh).

Net als bij congruentie gebruiken we "codes" van twee of drie letters om aan te geven uit welk geval de gelijkvormigheid volgt. Bij gelijkvormigheid schrijven we deze codes met kleine letters, terwijl we bij congruentie altijd hoofdletters gebruiken.

Bij de verhoudingen zoals we die hierboven hebben opgeschreven, deel je steeds de lengte van de een zijde in de eerste driehoek door de lengte van de overeenkomstige zijde in de tweede driehoek. Als je dit voor alledrie de zijden doet, krijg je steeds dezelfde verhouding. Je kunt ook in plaats daarvan juist twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen. Als je de overeenkomstige zijden van de andere driehoek door elkaar deelt, komt er hetzelfde uit. Kortom, bij een gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ geldt niet alleen

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

maar ook

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}.$$

Dat dit eigenlijk gewoon hetzelfde is, kun je zien door kruislings te vermenigvuldigen. Zowel bij de eerste als bij de tweede gelijkheid krijg je dan $|AB| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE|$.

Voorbeeld 17. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$. Op zijde BC ligt een punt D met $|BD| = 1$. Op zijde AB ligt een punt E zodat de lijnen ED en AC evenwijdig zijn. Hoe groot is $|AE|$?*

Oplossing Vanwege Z-hoeken geldt $\angle BCA = \angle BDE$ en $\angle CAB = \angle DEB$. Dus hebben we een gelijkvormigheid: $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ (hh). Nu kunnen we kiezen welke soort verhoudingen we gaan gebruiken. Laten we eerst eens twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen en dat ook bij de andere driehoek doen:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EB|}{|BD|}.$$

We weten $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$, dus links staat 2. De breuk rechts moet dan ook wel gelijk zijn aan 2 en verder weten we dat $|BD| = 1$. Dus $|EB| = 2$. Daaruit volgt $|AE| = 6 - 2 = 4$.

Als we juist twee overeenkomstige zijden van verschillende driehoeken door elkaar delen, dan krijgen we

$$\frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$

We weten $|BC| = 3$ en $|BD| = 1$, dus rechts staat 3. De breuk links moet dan ook wel gelijk zijn aan 3 en verder weten we dat $|AB| = 6$. Dus $|EB| = 2$. Daaruit volgt weer $|AE| = 4$. $\square$

8.3 Opgaven

Opgave 58. *Teken twee niet-congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zodat $\angle B = \angle E$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$.*

Uitwerking $\square$

Opgave 59. *Laat M het middelpunt van een cirkel zijn waar A en B op liggen. Bewijs dat als N het midden is van AB dat dan $\angle ANM = \angle BNM$.*

Uitwerking Aangezien $|MA|$ en $|MB|$ beide de straal van de cirkel zijn, geldt er $|MA| = |MB|$. Uiteraard geldt er $|MN| = |MN|$ en per definitie van N ook $|AN| = |BN|$. Waaruit volgt dat $\triangle AMN \cong \triangle BMN$ (ZZZ) en dus $\angle ANM = \angle BNM$. $\square$

Opgave 60. *Laat driehoek $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $\angle C < \angle A$. Laat D een punt op zijde BC zijn zodat $\angle BDA = \angle BAC$. Bewijs dat $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$.*

Uitwerking Er geldt uiteraard $\angle ABD = \angle B = \angle CBA$ en uit de gegevens volgt $\angle BDA = \angle BAC$. Dus we hebben een gelijkvormigheid van driehoeken: $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ (hh). Daaruit volgt de gelijkheid van verhoudingen: $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DB|}{|AB|}$. Kruislings vermenigvuldigen levert het gevraagde. $\square$

Opgave 61. *Laat P een punt zijn buiten de cirkel C met middelpunt M. Bewijs dat de raaklijnen*[1] *aan C die door P gaan even lang zijn.*

[1] Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die de cirkel maar één keer snijdt. De lijn die het raakpunt verbindt met het middelpunt van de cirkel, staat loodrecht op de raaklijn.

Uitwerking Noem de gemeenschappelijke punten van de raaklijnen met de cirkel X en Y. Dan geldt $\angle MXP = 90^\circ = \angle MYP$, aangezien het raaklijnen zijn. Uiteraard geldt $|MP| = |MP|$. Verder zijn $|MX|$ en $|MY|$ allebei de straal van de cirkel, dus zijn ook deze lengtes gelijk. Nu zien we dat $\triangle MXP \cong \triangle MYP$ (ZZR), waaruit direct volgt dat $|PX| = |PY|$. □

9 Driehoeken

We gaan kijken naar een paar speciale driehoeken en hun eigenschappen.

9.1 Gelijkbenige driehoek

Een driehoek met twee even lange zijden noemen we een *gelijkbenige* driehoek. De hoek ingesloten door de gelijke zijden heet de *tophoek* en de andere hoeken heten de *basishoeken*. Over gelijkbenige driehoeken bestaat een heel bekende stelling:

Stelling 9.1.1 (Stelling van de gelijkbenige driehoek)**.** *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt*

- *als je weet dat $\angle B = \angle C$, dan weet je ook dat $|AB| = |AC|$ en*
- *als je weet dat $|AB| = |AC|$, dan weet je ook dat $\angle B = \angle C$.*

Met andere woorden, als je weet dat een driehoek gelijkbenig is (dus twee gelijke zijden heeft), dan weet je meteen ook dat de basishoeken gelijk zijn. Als je andersom weet dat een driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan is het een gelijkbenige driehoek met als tophoek juist de derde hoek. Laten we eens kijken hoe we deze stelling kunnen bewijzen.

Bewijs

- Neem aan dat we $\angle B = \angle C$ weten. Definieer dan D als het punt op BC waarvoor $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADC$. Dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (HHZ): immers, $\angle B = \angle C$, $\angle ADB = \angle ADC$ en $|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt $|AB| = |AC|$ direct.
- Neem nu aan dat $|AB| = |AC|$. Laat D nu het midden van BC zijn, dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (ZZZ). Er geldt namelijk dat $|AB| = |AC|$, $|BD| = |CD|$ en $|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt nu $\angle B = \angle C$. □

Omdat de stelling uit twee verschillende delen bestaat, hebben we voor elk deel een apart bewijs gegeven. Vanaf nu mogen we deze stelling zonder bewijs toepassen (want we hebben hem al bewezen). We weten dus nu dat een driehoek gelijkbenig is precies dan als hij twee gelijke hoeken heeft. Wiskundigen gebruiken ook wel de uitdrukking "dan en slechts dan als" hiervoor: voor een driehoek $\triangle ABC$ geldt $|AB| = |AC|$ dan en slechts dan als $\angle B = \angle C$.

We hadden eigenlijk net zo goed een gelijkbenige driehoek kunnen definiëren als een driehoek met twee gelijke hoeken. Met de stelling hierboven volgt daar toch uit dat de driehoek dan ook twee gelijke zijden heeft. We noemen dat *equivalente definities* van de gelijkbenige driehoek: het maakt niet uit of je een gelijkbenige driehoek nou op de ene of op de andere manier definieert.

Equivalente definities 1 (Gelijkbenige driehoek)**.** *Een gelijkbenige driehoek is een driehoek*

- *met twee gelijke hoeken;*
- *met twee gelijke zijden.*

9.2 Gelijkzijdige driehoek

Een driehoek waarvan zelfs alledrie de zijden even lang zijn, heet een *gelijkzijdige* driehoek. Ook deze speciale eigenschap kunnen we vertalen in de hoeken van de driehoek.

Stelling 9.2.1 (Stelling van de gelijkzijdige driehoek)**.** *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt $|AB| = |BC| = |CA|$ dan en slechts dan als $\angle A = \angle B = \angle C$.*

Bewijs Omdat dit een "dan en slechts dan"-stelling is, bestaat het bewijs weer uit twee delen.

≻ Neem eerst aan dat $|AB| = |BC| = |CA|$. Omdat $|AB| = |BC|$, is de driehoek gelijkbenig met tophoek B en geldt volgens de stelling van de gelijkbenige driehoek dat $\angle A = \angle C$. Ook weten we dat $|BC| = |CA|$ en dus is de driehoek gelijkbenig met tophoek C. Hieruit volgt $\angle A = \angle B$. Als we dit samenvoegen, zien we dat $\angle A = \angle B = \angle C$.

≻ Neem nu aan dat $\angle A = \angle B = \angle C$. We passen weer de stelling van de gelijkbenige driehoek toe, maar nu de andere kant op. Uit $\angle A = \angle B$ volgt dat $|CA| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek C) en uit $\angle A = \angle C$ volgt dat $|AB| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek B). Dus $|AB| = |BC| = |CA|$. □

De som van de hoeken van elke driehoek is $180°$, dus dat geldt ook voor een gelijkzijdige driehoek. Omdat alle hoeken van een gelijkzijdige driehoek ook nog eens gelijk zijn, moeten al deze hoeken dan gelijk zijn aan $60°$. Andersom geldt natuurlijk dat als twee hoeken van een driehoek allebei $60°$ zijn, dat dan de derde ook wel $60°$ moet zijn en daar volgt dan weer uit dat de driehoek gelijkzijdig is. Al met al krijgen we de volgende equivalente definities voor een gelijkzijdige driehoek:

Equivalente definities 2 (Gelijkzijdige driehoek)**.** *Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek*

- *waarin alle hoeken gelijk zijn;*
- *waarin twee hoeken gelijk zijn aan* $60°$*;*
- *met drie gelijke zijden;*
- *die gelijkbenig is met een tophoek van* $60°$*.*

Onthoud deze equivalente definities, zodat je op elk moment degene kunt gebruiken die in die situatie het handigste uitkomt.

9.3 Rechthoekige driehoek

Ten slotte zijn er nog de driehoeken waarvan een van de hoeken gelijk is $90°$. Aangezien een hoek van $90°$ een rechte hoek genoemd wordt, zegt men dat zo'n driehoek *rechthoekig* is. Een zeer beroemde stelling over dit soort driehoeken is de stelling van Pythagoras.

Stelling 9.3.1 (Stelling van Pythagoras)**.** *Laat* $\triangle ABC$ *een driehoek zijn.*
Dan geldt $\angle A = 90°$ *dan en slechts dan als* $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$*.*

Bewijs Door de "dan en slechts dan" bestaat dit bewijs weer uit twee delen.

≻ Stel dat $\angle A = 90°$ en laat D het punt op BC zijn zodat $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Dan geldt $\angle ABC = \angle DBA$ en $\angle ADB = 90° = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (hh). Verder is $\angle ACB = \angle DCA$ en $\angle CDA = 90° = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (hh).

  Uit de eerste gelijkvormigheid volgt $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DB|}{|BA|}$ en uit de tweede volgt $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$. Omdat $|BD| + |DC| = |BC|$, geldt

  $$|BC|^2 = |BC| \cdot (|BD| + |DC|) = |BC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |DC|.$$

  Als we de verhoudingen die we net gevonden hebben, kruislings vermenigvuldigen, krijgen we $|BC| \cdot |BD| = |AB|^2$ en $|BC| \cdot |DC| = |AC|^2$. Dit vullen we in en we vinden $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.

- $\succ$ Stel nu dat $|BC|^2 = |AB|^2+|AC|^2$ en definieer D als het punt op BC zodat $\angle BAD = \angle BCA$. Dan volgt daaruit, samen met $\angle DBA = \angle ABC$, dat $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ (hh) en dus $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Kruislings vermenigvuldigen geeft $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$.

  Nu geldt $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |BC| \cdot |BD| + |AC|^2$, dus

  $$|AC|^2 = |BC|^2 - |BC| \cdot |BD| = |BC| \cdot (|BC| - |BD|) = |BC| \cdot |DC|.$$

  Dit kunnen we herschrijven tot $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. We weten bovendien dat $\angle BCA = \angle ACD$ en dat zijn precies de ingesloten hoeken, dus geldt $\triangle DAC \sim \triangle ABC$ (zhz). Hieruit volgt $\angle ADC = \angle BAC$. Uit de gelijkvormigheid die we al eerder hadden, volgt $\angle BDA = \angle BAC$. We concluderen dat $\angle ADC = \angle BDA$. Maar deze twee hoeken vormen samen ook een gestrekte hoek, dus ze zijn samen 180° en dat betekent dat ze elk precies 90° zijn. Dus $\angle BAC$ is ook 90°. $\square$

9.4 Opgaven

Opgave 62. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. De punten S en T liggen in het vlak zodanig dat $\triangle ABS$ en $\triangle ACT$ gelijkzijdige driehoeken zijn die $\triangle ABC$ niet overlappen. Bewijs dat $|BT| = |CS|$.*

Uitwerking Doordat $\triangle ABS$ gelijkzijdig is, geldt $|SA| = |BA|$. Doordat $\triangle ACT$ gelijkzijdig is, geldt $|TA| = |CA|$. Verder zijn de hoeken $\angle CAT$ en $\angle SAB$ allebei gelijk aan 60°. Dus geldt $\angle BAT = \angle BAC + \angle CAT = \angle BAC + 60° = \angle BAC + \angle SAB = \angle SAC$. Hiermee vinden we de congruentie $\triangle BAT \cong \triangle SAC$ (ZHZ). Hieruit volgt direct dat $|BT| = |CS|$. $\square$

Opgave 63. *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Bewijs dat $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.*

Uitwerking Noem het snijpunt van de diagonalen S. Dan levert de stelling van Pythagoras in driehoeken $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$ en $\triangle DSA$ (hoek S is in alle gevallen immers recht):

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |SA|^2 + |SB|^2, \\ |BC|^2 &= |SB|^2 + |SC|^2, \\ |CD|^2 &= |SC|^2 + |SD|^2, \\ |DA|^2 &= |SD|^2 + |SA|^2. \end{aligned}$$

Dus

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2 + |SD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2.$$

$\square$

Opgave 64 (Stelling van Thales)**.** *Bekijk een cirkel met middellijn AB en een punt C op de cirkel, ongelijk aan A en B. Bewijs dat $\angle ACB = 90°$.*

Uitwerking Laat M het middelpunt van de cirkel zijn. Dan is driehoek $\triangle MAC$ gelijkbenig met tophoek M, omdat $|AM|$ en $|CM|$ allebei de straal van de cirkel zijn. Dus $\angle MAC = \angle ACM$. Zo ook is $\triangle MBC$ gelijkbenig met tophoek M, dus $\angle CBM = \angle MCB$. Verder geldt volgens de hoekensom in driehoek $\triangle ABC$ dat

$$\begin{aligned} 180° &= \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA \\ &= \angle MAC + \angle ACM + \angle MCB + \angle CBM \\ &= 2\angle ACM + 2\angle MCB. \end{aligned}$$

Dus $90° = \angle ACM + \angle MCB = \angle ACB$. □

Opgave 65. ***Tweede Ronde 2004***
Twee cirkels A en B, beide met straal 1, raken elkaar uitwendig. Vier cirkels P, Q, R en S, alle vier met dezelfde straal r, liggen zo dat P uitwendig raakt aan A, B, Q en S; Q uitwendig raakt aan P, B en R; R uitwendig raakt aan A, B, Q en S; en S uitwendig raakt aan P, A en R. Bereken de lengte van r.

Uitwerking Noem de middelpunten van de cirkels A, P en S achtereenvolgens: M_1, M_2 en M_3. Verder is T het raakpunt van de cirkels A en B. Pythagoras levert in $\triangle M_2M_1T$ en $\triangle M_2M_3T$ voor M_2T: $|M_2T|^2 = |M_1M_2|^2 - |M_1T|^2$ en $|M_2T|^2 = |M_3M_2|^2 - |M_3T|^2$. Dus $(r+1)^2 - 1^2 = |M_1M_2|^2 - |M_1T|^2 = |M_3M_2|^2 - |M_3T|^2 = (r+r)^2 - (r+2)^2$. Dat levert de kwadratische vergelijking $r^2 - 3r - 2 = 0$. Met behulp van de abc-formule vind je de enige positieve oplossing $r = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. □

Opgave 66. ***Tweede Ronde 2004***
Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig in een punt P. Op C_1 ligt een punt Q zodanig dat de raaklijn in Q aan C_1 de cirkel C_2 snijdt in de punten A en B. De lijn QP snijdt C_2 nog in punt C. Bewijs dat driehoek $\triangle ABC$ gelijkbenig is.

Uitwerking Laat M_1 het middelpunt van C_1 zijn en M_2 het middelpunt van C_2. Punt P ligt op M_1M_2. Noem R het midden van AB. Omdat driehoek $\triangle ABM_2$ gelijkbenig is met tophoek M_2, is R ook het voetpunt van de hoogtelijn uit M_2. Verder geldt $\angle QPM_1 = \angle CPM_2$. Omdat de driehoeken $\triangle PQM_1$ en $\triangle PCM_2$ gelijkbenig zijn met tophoeken respectievelijk M_1 en M_2, geldt $\angle QPM_1 = \angle PQM_1$ en $\angle CPM_2 = PCM_2$. Dus $\angle PQM_1 = \angle PCM_2$. Daaruit volgt met Z-hoeken dat $M_1Q \parallel M_2C$. Omdat M_1Q loodrecht staat op de raaklijn aan cirkel C_1 in Q, staat M_2C ook loodrecht op deze raaklijn, dus loodrecht op AB. Aangezien ook M_2R loodrecht op AB staat, moet M_2C wel door R gaan. Dus de loodlijn vanuit C op AB gaat door het midden van AB en daaruit volgt dat

$\triangle ABC$ gelijkbenig is met tophoek C. (Als AB een middellijn van C_2 is, dan vallen R en M_2 samen. Het bewijs is in dat geval korter.) $\square$

10 Vierhoeken

Een *vierhoek* bestaat uit vier punten en vier zijden. We geven de punten aan met hoofdletters, waarbij je even op de volgorde moet letten: bij een vierhoek $ABCD$ kom je de punten A, B, C en D in die volgorde tegen als je een rondje loopt over de zijden. Zo'n vierhoek heeft dus zijden AB, BC, CD en DA. De *diagonalen* van de vierhoek zijn AC en BD.

Net als driehoeken hebben ook vierhoeken een vaste hoekensom: de som van de hoeken van een vierhoek is altijd gelijk aan 360°. Dat kun je inzien door de vierhoek op te delen in twee driehoeken door middel van een van de diagonalen.

We bekijken een aantal speciale vierhoeken.

10.1 Trapezium

Een *trapezium* is een vierhoek met minstens één paar evenwijdige zijden. Als $ABCD$ een trapezium is met AB evenwijdig aan CD, dan zijn vanwege U-hoeken (zie opgave 56) de hoeken $\angle B$ en $\angle C$ samen 180°. Dit geldt ook voor $\angle A$ en $\angle D$.

Andersom is het zo dat als in een vierhoek $ABCD$ geldt dat $\angle B + \angle C = 180°$, dat dan wegens U-hoeken de zijden AB en CD evenwijdig zijn. Dus we hebben de volgende equivalente definities voor een trapezium:

Equivalente definities 3 (Trapezium)**.** *Een trapezium is een vierhoek*

- *met een paar evenwijdige zijden;*
- *waarin twee aangrenzende hoeken samen* 180° *zijn.*

10.2 Parallellogram

Een *parellellogram* een vierhoek met twee paren evenwijdige, oftewel parallelle (vandaar de naam) zijden. Dit is dus een speciaal trapezium: eentje waarin het andere paar zijden ook evenwijdig is. Parallellogrammen hebben allerlei bijzondere eigenschappen. Het voorbeeld hieronder laat er één van zien.

Voorbeeld 18. *Laat $ABCD$ een parallellogram zijn. Bewijs dat de diagonalen AC en BD elkaar middendoor delen (dat wil zeggen, het snijpunt van de diagonalen is het midden van lijnstuk AC en ook het midden van lijnstuk BD).*

Oplossing Wegens Z-hoeken geldt $\angle ADB = \angle CBD$ en $\angle ABD = \angle CDB$. Omdat driehoeken $\triangle ABD$ en $\triangle CDB$ allebei zijde BD bevatten, zijn deze twee driehoeken congruent (HZH). Hieruit volgt $|AB| = |CD|$ en $|AD| = |CB|$. (Dit is een van de andere bijzondere eigenschappen van een parallellogram: de overstaande zijden zijn even lang.) Noem S het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram. We weten al $|AD| = |CB|$ en $\angle ADS = \angle CBS$. Verder geldt vanwege overstaande hoeken dat $\angle ASD = \angle CSB$, dus we vinden de congruentie $\triangle ADS \cong \triangle CBS$ (HHZ). Hieruit volgt $|AS| = |CS|$ (dus S is het midden van AC) en $|DS| = |BS|$ (dus S is het midden van BD). Dus de diagonalen snijden elkaar middendoor. $\square$

Andersom geldt ook dat als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, deze vierhoek een parallellogram moet zijn. Zo vinden we weer een aantal equivalente definities:

Equivalente definities 4 (Parallellogram)**.** *Een parallellogram is een vierhoek*

- *met twee paren evenwijdige zijden;*
- *met twee paren gelijke overstaande zijden;*
- *waarin twee overstaande zijden gelijk en evenwijdig zijn;*
- *waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.*

Dit zijn niet de enige equivalente definities van een parallellogram. Er mag met enige mate geschoven worden met de eigenschappen, zoals opgave 68 laat zien.

10.3 Ruit

Een parallellogram heeft twee paren gelijke zijden. Als alle vier de zijden even lang zijn, dan noemen we de vierhoek een *ruit*. Een ruit is dus een bijzonder parallellogram. We kunnen de ruit definiëren als een parallellogram met een extra eigenschap, bijvoorbeeld een van degene hieronder:

Equivalente definities 5 (Ruit)**.** *Een ruit is een parallellogram*

- *met vier gelijke zijden;*
- *waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt;*
- *waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.*

10.4 Rechthoek

Een ander speciaal geval van een parallellogram is de *rechthoek*. Ook deze kunnen we op meerdere manieren definiëren.

Equivalente definities 6 (Rechthoek). *Een rechthoek is een*

- *vierhoek met vier rechte hoeken;*
- *parallellogram met een rechte hoek;*
- *parallellogram met gelijke diagonalen.*

10.5 Vierkant

Ten slotte is er nog een heel bekend geval: het *vierkant*. Het is zowel een bijzondere situatie van de ruit en de rechthoek (en dus automatisch ook van de parallellogram). Hierdoor zijn er vele manieren om het vierkant te definiëren (zie opgave 67). De meest bekende definitie is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.

10.6 Opgaven

Opgave 67. *Bedenk zelf minstens vier equivalente definities voor een vierkant.*

Uitwerking Hieronder staan een aantal mogelijk definities.

- Een ruit met een rechte hoek;
- Een ruit met gelijke diagonalen;
- Een rechthoek waarin een diagonaal een hoek door midden deelt;
- Een rechthoek waarin de diagonalen loodrecht op elkaar staan. □

□

Opgave 68. *Geef bij de volgende opgaven steeds een tegenvoorbeeld of een bewijs.*

(a) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met S het snijpunt van de diagonalen. Stel dat S het midden van AC is en geldt dat AB en CD evenwijdig zijn. Is $ABCD$ een parallellogram?*

(b) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Is $ABCD$ een parallellogram?*

(c) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn. Stel dat de zijden AD en BC evenwijdig zijn en dat geldt $|AB| = |CD|$. Is $ABCD$ een parallellogram?*

Uitwerking

(a) Ja. Door overstaande hoeken geldt $\angle ASB = \angle CSD$ en door Z-hoeken $\angle SAB = \angle SCD$. Verder weet men ook dat $|SA| = |SC|$, waaruit de congruentie $\triangle ASB \cong \triangle CSD$ (HZH). Dus $|SB| = |SD|$ en S is het midden van beide diagonalen, waarmee bewezen is dat $ABCD$ een parallellogram is.

(b) Ja. We weten dat $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ en er is gegeven dat $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Daaruit volgt dat $\angle A + \angle B = 180°$. Daaruit volgt met U-hoeken, zie opgave 56, dat AD en BC evenwijdig zijn. Op dezelfde manier kun je bewijzen dat AB en CD evenwijdig zijn. Dat betekent dat $ABCD$ een parallellogram is.

(c) Nee. Deze vierhoek kan bijvoorbeeld ook een gelijkbenig trapezium zijn. □

□

Opgave 69. *Tweede Ronde 2000*
Laat $ABCD$ een parallellogram zijn. Aan de buitenkant van het parallellogram wordt op zijde AB een gelijkzijdige driehoek ABP gezet, en op zijde AD een gelijkzijdige driehoek ADQ. Bewijs dat driehoek $\triangle CPQ$ gelijkzijdig is.

Uitwerking Neem voor de volgende oplossing aan dat in het parallellogram hoek $\angle A$ minstens even groot is als hoek $\angle D$. In het andere geval kun je een soortgelijke oplossing vinden.

In een parallellogram zijn de overstaande zijden gelijk, dus $|CD| = |AB|$. Verder geldt in de gelijkzijdige driehoek $\triangle ABP$ dat $|AB| = |BP| = |AP|$, dus $|CD| = |BP| = |AP|$. Op dezelfde manier vinden we $|BC| = |DQ| = |AQ|$. Verder geldt in het parallellogram $\angle ADC = \angle CBA$, dus $\angle QDC = 60° + \angle ADC = 60° + \angle CBA = \angle CBP$. Daarnaast geldt $\angle QAP = 360° - 60° - 60° - \angle BAD$ en $\angle BAD = 180° - \angle CBA$, dus $\angle QAP = 240° - (180° - \angle CBA) = 60 + \angle CBA = \angle CBP$. Dus we hebben $\angle QDC = \angle CBP = \angle QAP$. Gecombineerd met de gelijke lengtes die we al hadden, krijgen we

$\triangle QAP \cong \triangle QDC \cong \triangle CBP$ (ZHZ). Daaruit volgt $|QP| = |QC| = |CP|$ en dat betekent dat $\triangle CPQ$ gelijkzijdig is. $\square$

Opgave 70. *Tweede Ronde 2005*
Bekijk een trapezium $ABCD$ met AB evenwijdig aan CD en $|AB| > |CD|$. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S. Het verlengde van AD snijdt het verlengde van BC in het punt T. Bewijs dat de lijn door S en T door de middens van de zijden AB en CD gaat.

Uitwerking Noem de snijpunten van ST met AB en CD respectievelijk E en F. Vanwege de evenwijdigheid geldt op grond van (hh) dat $\triangle DFT \sim \triangle AET$ en $\triangle FCT \sim \triangle EBT$. Dus

$$\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|DF|/|FT|}{|FC|/|FT|} = \frac{|AE|/|ET|}{|EB|/|ET|} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

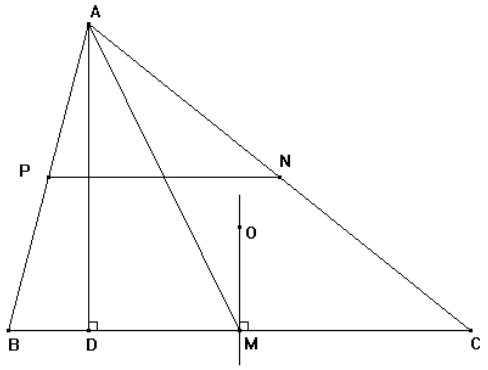
We zien echter nog meer gelijkvormigheden: ook $\triangle AES \sim \triangle CFS$ en $\triangle EBS \sim \triangle FDS$, dus

$$\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|DF|/|FS|}{|FC|/|FS|} = \frac{|BE|/|ES|}{|EA|/|ES|} = \frac{|BE|}{|EA|}.$$

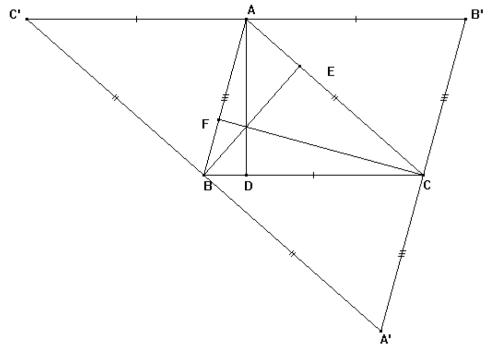
Als we deze twee vergelijkingen combineren, krijgen we dat $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|BE|}{|EA|}$, dus $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{1}{\left(\frac{|AE|}{|EB|}\right)}$, dus $\frac{|AE|}{|EB|} = 1$. Daarmee is bewezen dat E het midden is van lijnstuk AB, en met $\frac{|DF|}{|FC|} = \frac{|AE|}{|EB|} = 1$ vinden we dan ook dat F het midden is van lijnstuk DC. $\square$

11 Lijnen in een driehoek

In dit hoofdstuk zullen we gaan kijken naar een aantal speciale lijnen in een driehoek. Bekijk een driehoek $\triangle ABC$ met M het midden van zijde BC, N het midden van zijde CA en P het midden van zijde AB. Trek ook de lijn vanuit A loodrecht op zijde BC. Het snijpunt van deze lijn met zijde BC noemen we D. We zeggen ook wel dat D de *(loodrechte) projectie* van A op zijde BC is. Dat betekent dus gewoon dat D een punt is op zijde BC zó dat DA loodrecht staat op BC. We noemen E de projectie van B op CA en zo ook F de projectie van C op AB. Het zou natuurlijk kunnen dat sommige van deze punten, bijvoorbeeld M en D, samenvallen. Bij sommige speciale driehoeken gebeurt dat. Het kan ook dat de punten D, E en F niet allemaal binnen de driehoek liggen. Dan liggen ze eigenlijk op het verlengde van een zijde van de driehoek in plaats van op de zijde zelf.



Figuur 4. *Een middenparallel NP, zwaartelijn AM, middelloodlijn MO en een hoogtelijn AD in driehoek $\triangle ABC$*



Figuur 5. *Drie hoogtelijnen in driehoek $\triangle ABC$ en ondersteuning bij het bewijs van hun gemeenschappelijke punt*

11.1 Middenparallellen

Een *middenparallel* is een lijnstuk dat de middens van twee zijden verbindt. Zo zijn MN, NP en PM de middenparallellen van driehoek $\triangle ABC$ (zie ook figuur 4). Als je eens een paar driehoeken met hun middenparallellen tekent, dan valt het je wellicht op dat elke middenparallel evenwijdig loopt aan een zijde van de driehoek. Dit is altijd waar, zoals de volgende stelling laat zien.

Stelling 11.1.1. *De middenparallellen van een driehoek zijn evenwijdig aan de zijden van de driehoek en hebben precies de halve lengte van die evenwijdige zijde. De driehoek gevormd door de middenparallellen is dus gelijkvormig aan de oorspronkelijk driehoek met een factor $\frac{1}{2}$.*

Bewijs Omdat N het midden is van AC, geldt $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$. Zo ook is $|AP| = \frac{1}{2}|AB|$. Verder geldt $\angle BAC = \angle PAN$, waaruit we nu concluderen dat $\triangle ABC \sim \triangle APN$ (zhz) met een verkleiningsfactor van 2. Dus $|PN| = \frac{1}{2}|BC|$. Natuurlijk kunnen we op precies dezelfde manier laten zien dat $|NM| = \frac{1}{2}|AB|$ en $|PM| = \frac{1}{2}|AC|$. Hieruit volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ (zzz) met wederom verkleiningsfactor 2. Verder volgt uit de eerste gelijkvormigheid dat $\angle ANP = \angle ACB$ en dus met F-hoeken dat $NP \parallel BC$. Op dezelfde manier zien we ook dat $MN \parallel AB$ en $MP \parallel AC$. $\square$

11.2 Zwaartelijnen

Het lijnstuk dat in een driehoek een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde heet een *zwaartelijn*. De drie zwaartelijnen AM, BN en CP van een driehoek gaan altijd door één punt. In het bewijs van deze speciale eigenschap komt men nog een belangrijke eigenschap van zwaartelijnen tegen. Beide waarnemingen staan in de volgende stelling.

Stelling 11.2.1. *De drie zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, het zogenaamde* zwaartepunt *van de driehoek. Bovendien wordt iedere zwaartelijn door het zwaartepunt verdeeld in twee lijnstukken die zich verhouden als* $2 : 1$.

Bewijs Definieer Z als het snijpunt van AM met CP. Aangezien MP een middenparallel is in driehoek $\triangle ABC$ geldt volgens stelling 11.1.1 dat $MP \parallel AC$. Met Z-hoeken volgt daaruit dat $\angle PMZ = \angle ZAC$ en $\angle MPZ = \angle ACZ$ en dus $\triangle ACZ \sim \triangle MPZ$ (hh). Uit die gelijkvormigheid volgt dat $\frac{|AZ|}{|MZ|} = \frac{|AC|}{|MP|}$. Maar stelling 11.1.1 zegt dat die laatste verhouding gelijk is aan 2 dus $\frac{|AZ|}{|MZ|} = 2$. Als we nu Z' definiëren als het snijpunt van AM met BN dan krijgen we op dezelfde manier $\frac{|AZ'|}{|MZ'|} = 2$. Aangezien zowel Z als Z' binnen de driehoek liggen (en dus niet op het verlengde van AM) moet wel gelden dat $Z = Z'$. Dus gaan de drie zwaartelijnen door één punt en hebben we onderweg ook de tweede eigenschap bewezen. □

11.3 Middelloodlijnen

Een *middelloodlijn* van een lijnstuk is de lijn die door het midden van het lijnstuk gaat en bovendien loodrecht op het lijnstuk staat. Een nuttig lemma[2] is het volgende:

Lemma 11.3.1. *Een punt Z ligt op de middelloodlijn van AB dan en slechts dan als* $|ZA| = |ZB|$.

Met bovenstaand lemma kunnen we laten zien dat ook de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan.

Stelling 11.3.2. *De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt.*

Bewijs Laat O het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en BC zijn. Dan geldt volgens lemma 11.3.1 dat $|OA| = |OB|$ (want O ligt op de middelloodlijn van AB) en $|OB| = |OC|$ (want O ligt op de middelloodlijn van BC). Daaruit volgt $|OA| = |OC|$ en dus ligt volgens lemma 11.3.1 het punt O op de middelloodlijn van AC. De middelloodlijn van zijde AC gaat dus door het snijpunt van de middelloodlijnen van AB en BC; oftewel, ze gaan met z'n drieën door één punt. □

[2] Een lemma is "kleine" stelling die men gebruikt om een andere stelling te bewijzen.

Blijkbaar bestaat er voor iedere driehoek een punt dat gelijke afstanden heeft tot de hoekpunten van die driehoek. Dan is O dus het middelpunt van een cirkel die door alle hoekpunten gaat. Deze cirkel noemt men de *omgeschreven cirkel* van $\triangle ABC$.

11.4 Hoogtelijnen

In onze driehoek $\triangle ABC$ staat de lijn AD loodrecht op zijde BC. We noemen deze lijn de *hoogtelijn* vanuit punt A. Zo ook is BE de hoogtelijn vanuit B en CF de hoogtelijn vanuit C. Deze lijnen zijn belangrijk als je de oppervlakte van een driehoek wilt berekenen: de oppervlakte van een driehoek is een half keer basis keer hoogte. Met basis BC en hoogtelijn AD geeft dat bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AD|$.

Stelling 11.4.1. *De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt. Dit punt noemt men het* hoogtepunt *van de driehoek.*

Bewijs Trek lijnen door de hoekpunten evenwijdig aan de overstaande zijden. Laat deze drie lijnen de driehoek $\triangle A'B'C'$ vormen, zie figuur 5. Aangezien $AC \parallel BC'$ en $AC' \parallel BC$, is $ACBC'$ een parallellogram en geldt er $|AC'| = |BC|$. Net zo geldt dat $|AB'| = |BC|$, aangezien ook $CBAB'$ een parallellogram is. De lijn AD staat loodrecht op BC en dus ook op $B'C'$. Bovendien hebben we net gezien dat A het midden is van $B'C'$. Hieruit volgt dat AD de middelloodlijn van lijnstuk $B'C'$. Zo ook zijn de andere hoogtelijnen uit driehoek $\triangle ABC$ middelloodlijnen in $\triangle A'B'C'$. De middelloodlijnen van driehoek $\triangle A'B'C'$ gaan volgens stelling 11.3.2 door één punt gaan en dus doen de hoogtelijnen van driehoek $\triangle ABC$ dat ook. $\square$

11.5 Bissectrices

Een *bissectrice* van een hoek is een lijn die die hoek in twee gelijke delen verdeelt. Een driehoek heeft drie hoeken en dus ook drie bissectrices. Als we de zijden AB en AC van driehoek $\triangle ABC$ doortrekken, ontstaan er bij punt A nog drie hoeken. De hoek tegenover hoek $\angle BAC$ heeft dezelfde bissectrice als hoek $\angle BAC$. De andere twee hoeken hebben ook samen één bissectrice. Dit noemen we ook wel de *buitenbissectrice* van de driehoek in punt A. Om onderscheid te maken tussen de twee bissectrices bij A noemen we de andere dan de binnenbissectrice. Zie figuur 6 voor een hoek met twee bissectrices.

Ook voor de drie (binnen-)bissectrices van een driehoek geldt dat ze door één punt gaan. Om dit te bewijzen, hebben we eerst een lemma nodig.

Lemma 11.5.1. *Laat k en ℓ twee snijdende lijnen zijn. Voor een punt P geldt dat $d(P,k) = d(P,\ell)$ dan en slechts dan als P op een van de twee bissectrices van k en ℓ ligt. Hierin is $d(A,a)$ de loodrechte afstand van het punt A tot de lijn a.*

Bewijs Laat k en ℓ elkaar snijden in S en laat K en L de projecties van P op respectievelijk k en ℓ zijn.

- Stel dat P op een van de bissectrices ligt. Dan geldt dus dat $\angle PSK = \angle PSL$. Verder volgt uit de definitie van K en L dat $\angle SKP = 90° = \angle SLP$. Dus $\triangle PKS \cong \triangle PLS$ (ZHH), aangezien beide driehoeken zijde PS hebben. Hieruit volgt dat $|PK| = |PL|$ en dus $d(P, k) = |PK| = |PL| = d(P, \ell)$.

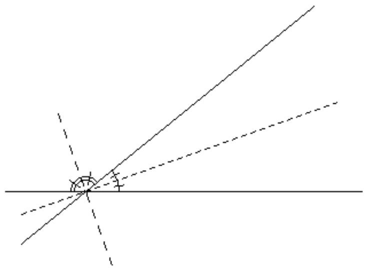
- Neem nu aan dat $d(P, k) = d(P, \ell)$, oftewel $|PK| = |PL|$. Dan geldt eveneens door de gemeenschappelijke zijde PS dat $\triangle PKS \cong \triangle PLS$ (ZZR). Dus $\angle PSK = \angle PSL$, waaruit volgt dat P op een van de bissectrices moet liggen. □

Stelling 11.5.2. *De binnenbissectrices van een driehoek gaan door één punt. Ook gaan twee buitenbissectrices en de binnenbissectrice van de derde hoek door één punt (voor elke keuze van de twee buitenbissectrices).*

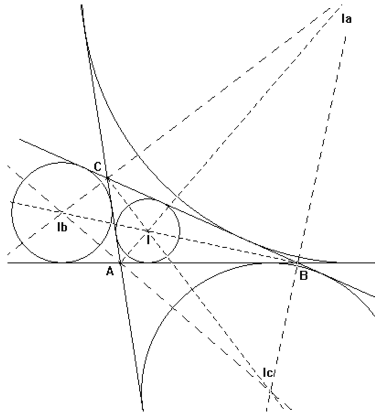
Bewijs Laat I het snijpunt van de binnenbissectrices van hoeken $\angle A$ en $\angle B$ zijn. Dan geldt volgens lemma 11.5.1 dat $d(I, AC) = d(I, AB)$ en $d(I, BA) = d(I, BC)$. Daaruit volgt dat $d(I, CA) = d(I, CB)$ en dus geldt volgens lemma 11.5.1 dat I ook op een bissectrice van hoek $\angle C$ moeten liggen. Aangezien I overduidelijk binnen de driehoek ligt, zal het om de binnenbissectrice moeten gaan. Dus alle binnenbissectrices gaan door I.

Definieer nu I_a als het snijpunt van de binnenbissectrice van hoek $\angle A$ en de buitenbissectrice van hoek $\angle B$. Ook nu geldt volgens lemma 11.5.1 dat $d(I_a, AC) = d(I_a, AB)$ en $d(I_a, BA) = d(I_a, BC)$. Dus geldt weer dat $d(I_a, CA) = d(I_a, CB)$ en dat I_a op een bissectrice van hoek $\angle C$ ligt. Dit kan nu niet de binnenbissectrice van hoek $\angle C$ zijn, want het snijpunt van de binnenbissectrices van hoeken $\angle A$ en $\angle C$ is I en dat ligt niet op de buitenbissectrice van hoek $\angle B$. □

Het punt I van hierboven heeft gelijke afstand tot alledrie de zijden van de driehoek. Dat betekent dat je een cirkel kunt tekenen met middelpunt I die precies raakt aan alle zijden van de driehoek. Dit noemen we de *ingeschreven cirkel* van driehoek $\triangle ABC$. Zo ook kunnen we een cirkel tekenen met middelpunt I_a die precies raakt aan de (verlengden van de) zijden van driehoek $\triangle ABC$. Dit noemen we een *aangeschreven cirkel*. Natuurlijk zijn er nog twee andere aangeschreven cirkels met middelpunten I_b en I_c. Zie figuur 7.



Figuur 6. *Een hoek met haar binnen- en buitenbissectrice.*



Figuur 7. *Een driehoek $\triangle ABC$ met haar in- en aangeschreven cirkels.*

11.6 Opgaven

Opgave 71. *In een driehoek $\triangle ABC$ is M het midden van zijde BC, N het midden van CA en P het midden van AB. Hoe groot is de oppervlakte van de driehoek $\triangle MNP$ ten opzichte van de oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$?*

Uitwerking Omdat de zijden van $\triangle MNP$ de middenparallellen zijn in driehoek $\triangle ABC$, geldt $\angle PAN = \angle MNC = \angle BPM = \angle NMP$ en ook $\angle CMN = \angle MBP = \angle NPA = \angle MNP$. Verder zijn de lengtes $|MN|$, $|AP|$ en $|PB|$ allemaal even lang. Nu volgt met (HZH) dat de driehoeken $\triangle APN$, $\triangle PBM$, $\triangle NMC$ en $\triangle MNP$ allemaal congruent zijn met elkaar. Dus past $\triangle MNP$ precies vier keer in $\triangle ABC$.
Dat de oppervlakte 4 keer zo klein is volgt ook uit het feit dat $\triangle MNP$ precies $\frac{1}{2}$ keer $\triangle ABC$ is. Daardoor is de oppervlakte $(\frac{1}{2})^2$ keer zo groot. $\square$

Opgave 72. *In een driehoek $\triangle ABC$ is M het midden van zijde BC, N het midden van CA en P het midden van AB. Bewijs dat het zwaartepunt van driehoek $\triangle ABC$ ook het zwaartepunt is van driehoek $\triangle MNP$.*

Uitwerking Omdat MN en MP middenparallellen zijn, geldt $MN \parallel AP$ en $MP \parallel AN$. Dus $MNAP$ is een parallellogram. We weten dat in een parallellogram de diagonalen elkaar middendoor snijden. Noem nu X het midden van NP. Dan gaat de diagonaal AM van parallellogram $MNAP$ door punt X (het midden van de andere diagonaal). Dat betekent dat MX een zwaartelijn is van driehoek $\triangle MNP$ en deze zwaartelijn valt precies samen met AM. Op dezelfde manier zien we dat de andere zwaartelijnen van driehoek $\triangle MNP$ samenvallen met zwaartelijnen van driehoek $\triangle ABC$. Dan moeten ook wel de twee zwaartepunten samenvallen. $\square$

Opgave 73. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. De hoogtelijn vanuit A heeft lengte h_A, de hoogtelijn vanuit B lengte h_B. Bewijs dat $h_A = h_B \frac{|AC|}{|BC|}$.*

Uitwerking Noteer de oppervlakte van $\triangle ABC$ met $[ABC]$. Er geldt $[ABC] = \frac{1}{2} h_A \cdot |BC|$, maar ook $[ABC] = \frac{1}{2} h_B \cdot |AC|$. Dus $|BC| \cdot h_A = |AC| \cdot h_B$, waaruit het gevraagde volgt. $\square$

Opgave 74. *Laat AD de hoogtelijn zijn in de rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ met $\angle A = 90°$. Bewijs dat $|AD|^2 = |DC| \cdot |DB|$.*

Uitwerking Er geldt dat $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ (hh) en $\triangle DAC \sim \triangle ABC$ (hh), net als in het eerste deel van het bewijs van stelling 9.3.1. Maar dan zal ook gelden $\triangle DBA \sim \triangle DAC$, aangezien beide driehoeken gelijkvormig zijn met $\triangle ABC$. Uit die laatste gelijkvormigheid volgt $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{|AD|}$. Kruislings vermenigvuldigen levert het gevraagde. $\square$

Opgave 75. *Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. Bewijs dat de binnen- en buitenbissectrices van hoek $\angle A$ loodrecht op elkaar staan.*

Uitwerking Neem een punt D op de binnenbissectrice van hoek $\angle A$, binnen de driehoek. Neem een punt E op de buitenbissectrice van hoek $\angle A$ aan de kant van B. Kies ten slotte nog een punt F op het verlengde van zijde AC aan de kant van A. De binnenbissectrice deelt hoek $\angle BAC$ op in gelijke delen, dus $\angle BAD = \angle DAC$. De buitenbissectrice deelt hoek BAF op in twee gelijke delen, dus $\angle FAE = \angle EAB$. De hoeken $\angle FAE$, $\angle EAB$, $\angle BAD$ en $\angle DAC$ vormen samen een gestrekte hoek, dus de som van deze vier hoeken is 180°. Aan de andere kant weten we nu dat $\angle FAE + \angle EAB + \angle BAD + \angle DAC = 2\angle EAB + 2\angle BAD$. Dus $\angle EAB + \angle BAD = 90°$, waaruit volgt dat de twee bissectrices loodrecht op elkaar staan. $\square$

Opgave 76. *Bewijs dat een zwaartelijn zijn driehoek in twee gelijke oppervlakten verdeelt. Kun je nu ook bewijzen dat de drie zwaartelijnen de driehoek verdelen in zes gelijke oppervlakten?*

Uitwerking Laat M het midden zijn van zijde BC van driehoek $\triangle ABC$. Dan hebben de driehoeken $\triangle ABM$ en $\triangle ACM$, bekeken met basis BM en CM, gelijke hoogte, namelijk de hoogtelijn vanuit A loodrecht op BC. Dus hebben ze ook gelijke oppervlakten.
Noem de middens van de zijden AC en AB respectievelijk N en P, en laat Z het zwaartepunt zijn. Noteer de oppervlakte van een driehoek $\triangle PQR$ als $[PQR]$. De driehoeken $\triangle BMZ$ en $\triangle CMZ$ hebben gelijke oppervlakte aangezien ZM een zwaartelijn is in $\triangle BCZ$. Bovendien weten we dat $[ABM] = [ACM]$, dus $[ABZ] = [ABM] - [BZM] = [ACM] - [CZM] = [ACZ]$. Op soortgelijke manier krijgen we $[ABZ] = [BCZ]$, waaruit volgt dat $[ABZ] = [BCZ] = [CAZ] = \frac{1}{3}[ABC]$. Omdat $2[BMZ] = [BMZ] + [CMZ] =$

$[BCZ] = \frac{1}{3}[ABC]$, geldt $[BMZ] = \frac{1}{6}[ABC]$. Zo ook zijn de oppervlakten van de andere vijf kleine driehoeken gelijk aan $\frac{1}{6}[ABC]$. $\square$

Opgave 77 (Bissectricestelling). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met D het punt op BC zodat AD een binnenbissectrice is. Bewijs dat $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|DC|}$.*
HINT: *Trek AC door totdat deze snijdt met de lijn door B evenwijdig aan AD. Ga nu op zoek naar gelijke lengtes en gelijkvormige driehoeken.*

Uitwerking Laat S het snijpunt zijn van AC met de lijn door B evenwijdig aan AD. Dan geldt door F-hoeken dat $\angle BSA = \angle DAC$ en door Z-hoeken dat $\angle SBA = \angle BAD$, maar aangezien AD een bissectrice is weten we ook dat $\angle BAD = \angle DAC$, dus $\angle BSA = \angle SBA$. Hieruit volgt dat $\triangle ABS$ een gelijkbenige driehoek is met tophoek A. Dat betekent dat $|AS| = |AB|$. Verder weten we door de evenwijdigheid van AD met BS dat $\triangle CAD \sim \triangle CSB$ (hh) en dus $\frac{|CS|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CD|}$. Nu geldt $\frac{|AS|}{|CA|} = \frac{|CS|-|CA|}{|CA|} = \frac{|CS|}{|CA|} - 1 = \frac{|CB|}{|CD|} - 1 = \frac{|CB|-|CD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{|CD|}$. Als we helemaal links ook nog $|AS|$ vervangen door $|AB|$, krijgen we $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|CD|}$ en dat is wat we moesten bewijzen. $\square$

Opgave 78. *Tweede Ronde 2006*
Gegeven is een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$. De lengten van de hoogtelijnen uit A, B en C zijn achtereenvolgens h_A, h_B en h_C . Binnen de driehoek ligt een punt P. De afstand van P tot BC is $\frac{1}{3}h_A$ en de afstand van P tot AC is $\frac{1}{4}h_B$. Druk de afstand van P tot AB uit in h_C.

Uitwerking Noteer de oppervlakte van driehoek $\triangle ABC$ met $[ABC]$. Dan geldt er uiteraard $[ABC] = \frac{1}{2}h_C \cdot |AB| = \frac{1}{2}h_A \cdot |BC| = \frac{1}{2}h_B \cdot |CA|$. Oftewel $|AB| = \frac{2[ABC]}{h_C}$, $|BC| = \frac{2[ABC]}{h_A}$ en $|CA| = \frac{2[ABC]}{h_B}$. Laat $\ell_A = \frac{1}{3}h_A$, $\ell_B = \frac{1}{4}h_B$ en ℓ_C de afstanden van P tot de zijden zijn. Dan geldt er $[ABC] = [ABP] + [BCP] + [CAP] = \frac{1}{2}\ell_C \cdot |AB| + \frac{1}{2}\ell_A \cdot |BC| + \frac{1}{2}\ell_B \cdot |CA| = \frac{1}{2}(\ell_C \frac{2[ABC]}{h_C} + \frac{1}{3}h_A \frac{2[ABC]}{h_A} + \frac{1}{4}h_B \frac{2[ABC]}{h_B}) = [ABC] \cdot (\frac{\ell_C}{h_C} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3})$. Dus $\frac{\ell_C}{h_C} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$. Oftewel $\ell_C = \frac{5}{12}h_C$. $\square$

Opgave 79. *Tweede Ronde 2007*
Gegeven zijn een driehoek ABC en een punt P binnen de driehoek. Definieer D, E en F als de middens van respectievelijk AP, BP en CP. Noem verder R het snijpunt van AE en BD, noem S het snijpunt van BF en CE, en noem T het snijpunt van CD en AF. Bewijs dat de oppervlakte van zeshoek $DRESFT$ niet afhangt van de positie van het punt P binnen de driehoek.

Uitwerking De oppervlakte van $\triangle ABC$ noteren we als $[ABC]$ en de oppervlakte van een vierhoek $ABCD$ als $[ABCD]$. We bekijken eerst $\triangle ABP$. De lijnstukken AE en BD zijn

twee zwaartelijnen in deze driehoek, dus R is het zwaartepunt van de driehoek en als we de derde zwaartelijn vanuit P door R erbij tekenen, dan wordt de driehoek verdeeld in zes even grote driehoekjes. Dus geldt $[DREP] = \frac{2}{6}[ABP]$.
Voor $\triangle BCP$ vinden we op eenzelfde manier $[ESFP] = \frac{2}{6}[BCP]$ en voor $\triangle CAP$ weer $[FTDP] = \frac{1}{3}[CAP]$, zodat $[DRESFT] = \frac{1}{3}([ABP] + [BCP] + [CAP]) = \frac{1}{3}[ABC]$ en dat is onafhankelijk van de positie van P. $\square$

Katern 4

Bewijsmethoden

12 Bewijs uit het ongerijmde

In Katern 2 hebben we de volgende rekenregel bewezen, als onderdeel van rekenregel 4:

> Als a een deler is van m, maar niet van n, dan is a geen deler van $m + n$.

We kijken even in wat meer detail naar het bewijs van deze rekenregel.

Bewijs Neem een getal m dat deelbaar is door a en een getal n dat niet deelbaar is door a. We willen nu bewijzen dat a *niet* een deler is van hun som, die we even l noemen: $l = m+n$. Stel nu eens dat a juist *wel* een deler is van l, dan is het dus een deler van zowel l als m, en dus (wegens het eerste onderdeel van rekenregel 4) ook van het verschil $l - m$. Uit $l = m + n$ volgt bovendien dat $n = l - m$. Dus a is dan een deler van n. Maar we waren juist uitgegaan van een getal n dat niet deelbaar is door a. Kortom, de aanname dat a *wel* een deler is van l kan niet juist zijn en we concluderen dat a *niet* een deler is van l. $\square$

Kijk nog eens goed naar dit bewijs. We wilden bewijzen dat dat a *niet* een deler is van l. We namen even aan dat het juist *wel* zo was. Daaruit leidden we af dat het getal n, dat gekozen was als een getal dat niet deelbaar is door a, toch deelbaar was door a. Dat is natuurlijk onmogelijk. Kortom, onze aanname was onjuist.

Deze manier van redeneren kunnen we algemener toepassen. We willen bewijzen dat een of andere bewering *niet* waar is. We nemen even aan dat de bewering juist *wel* waar is en laten vervolgens zien dat dat tot iets onmogelijks leidt; we komen uit op een *tegenspraak*. Je komt bijvoorbeeld uit op '$5 < 4$', of op '$3\frac{1}{3}$ is een geheel getal', of op '$x^2 = -5$' (voor x een reëel getal), of op '127 is even', of op .... Stuk voor stuk uitspraken waarvan overduidelijk is dat ze niet waar zijn. Dan kunnen we daaruit concluderen dat de bewering inderdaad niet waar is.

Zo'n bewijs wordt een *bewijs uit het ongerijmde* genoemd. In plaats van direct te laten zien dat iets niet waar is, laten we zien dat het niet zo kan zijn dat het wel waar is!

Het is eigenlijk zo'n natuurlijke manier van redeneren, dat het je misschien niet eens opgevallen is dat we hem al weleens vaker hebben toegepast. Hier een ander voorbeeld, letterlijk uit Katern 2 (voorbeeld 6). Probeer te herkennen waar in de redenering de aanname wordt gemaakt die juist uiteindelijk moet worden ontkracht. En tot welke tegenspraak leidt deze aanname?

> Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b. Wat is nu $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$?

Bewijs We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdeler zou zijn van zowel e als f, dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. □

Zoals we hierboven als zeiden: in plaats van direct te laten zien dat iets *niet* waar is, laten we dus zien dat het niet zo kan zijn dat het *wel* waar is. En zo zou je ook, in plaats van direct te laten zien dat iets *wel* waar is, kunnen laten zien dat het niet zo kan zijn dat het *niet* waar is.

In Katern 1 heb je gezien dat als je een bewijs met inductie doet, het een goede gewoonte is om dat aan het begin van het bewijs ook aan te kondigen: "We gaan dit bewijzen met inductie naar n". Dan weet de lezer tenminste wat voor bewijsmethode je gaat gebruiken. Zo ook, als je een bewijs uit het ongerijmde gaat geven, laat de lezer dan even weten dat je deze methode gaat toepassen; dan snapt hij/zij tenminste waarom je zo'n rare aanname doet. Hieronder geven we twee voorbeelden van bewijzen uit het ongerijmde.

Voorbeeld 19. *Bewijs dat $\sqrt{5}$ geen rationaal getal is.*

Oplossing We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat $\sqrt{5}$ wel een rationaal getal is. Dan is $\sqrt{5}$ gelijk aan $\frac{t}{n}$ voor zekere gehele getallen t en n. Dus dan is $5 = \frac{t^2}{n^2}$, oftewel $5n^2 = t^2$. We noemen dit laatste getal even N, dus

$N = 5n^2$ maar ook $N = t^2$. Kijk nu naar het aantal priemfactoren 5 in N. Volgens de uitdrukking $N = 5n^2$ heeft N een oneven aantal priemfactoren 5. Maar volgens de uitdrukking $N = t^2$ heeft N juist een even aantal priemfactoren 5. Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat $\sqrt{5}$ een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus $\sqrt{5}$ is geen breuk. $\square$

Voorbeeld 20. *Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.*

Oplossing We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Veronderstel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, zeg k. Dan kunnen we ze ook alle k opschrijven: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Kijk nu eens naar dit getal:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1.$$

Wegens die spelbreker '+1' kan dit getal niet deelbaar zijn door p_1 (omdat 1 niet deelbaar is door p_1, dus wegens rekenregel 4). En ook niet door p_2. En ook niet door p_3. Et cetera. Toch moet dit getal een priemontbinding hebben. Dus moet N een priemfactor bevatten die nog niet in ons lijstje stond. Maar dat is een beetje vreemd: ons lijstje bestond immers uit *alle* priemgetallen. We kunnen niet anders dan concluderen dat onze eerste aanname onjuist was. Er zijn dus niet maar eindig veel priemgetallen; er zijn er oneindig veel! $\square$

Dit bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, stamt af van Euclides, een Grieks wiskundige uit de 3e eeuw voor Christus.

Opgave 80. *Van een getal n is gegeven dat het niet deelbaar is door 3. Bewijs dat n ook niet deelbaar is door 123.*

Uitwerking We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat n wel deelbaar is door 123. Dan is er dus een gehele k zodat $n = 123k$. Maar $123 = 3 \cdot 41$, dus $n = 3 \cdot (41k)$. Dit betekent echter dat n deelbaar is door 3, terwijl juist gegeven was dat n niet deelbaar is door 3. Kortom: tegenspraak. We concluderen dat n juist niet deelbaar is door 123. $\square$

Opgave 81. *Geef alle reële oplossingen (x, y, z) van de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.*

Uitwerking Het is duidelijk dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ een oplossing is. We beweren nu dat er geen andere oplossingen zijn. Dit bewijzen we uit het ongerijmde.
Stel dat er wel nog een andere oplossing is. Dat is dan een oplossing waarvoor niet alle drie de x, y en z gelijk aan 0 zijn, dus bijvoorbeeld $x \neq 0$. Dan geldt $x^2 > 0$. Bovendien geldt $y^2 \geq 0$ en $z^2 \geq 0$, dus $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Maar dat is in tegenspraak met $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Een soortgelijke tegenspraak leiden we af als $y \neq 0$ of $z \neq 0$. Kortom, onze aanname dat er nog een andere oplossing is, kan niet juist zijn.

We concluderen dat er geen andere oplossing is, dus dat $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ de enige oplossing is. $\square$

Opgave 82. *Bewijs dat er geen natuurlijke getallen x en y zijn zodat $x^2 + 5x = 2y^4 + 1$.*

Uitwerking We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Veronderstel dat er wel een oplossing (x, y) is. Het rechterlid is dan duidelijk oneven. Het linkerlid is ofwel

$$\text{oneven} \cdot \text{oneven} + \text{oneven} \cdot \text{oneven} \quad \text{en dat is even}$$

ofwel

$$\text{even} \cdot \text{even} + \text{oneven} \cdot \text{even} \quad \text{en dat is ook even.}$$

(Alternatief: het linkerlid is $x(x+5)$ en nu is x even precies dan als $x+5$ oneven is, dus het linkerlid is het product van een even en een oneven getal, dus even.) Dus dan zou iets evens gelijk zijn aan iets onevens. Dat is absurd. Dus onze aanname was onjuist en er zijn geen oplossingen. $\square$

Opgave 83. ***Tweede Ronde 1978*** *Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking*

$$3x^2 = 9 + y^3.$$

Uitwerking We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat er wel gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$. Dan moet y^3 wel deelbaar zijn door 3, dus y ook. We schrijven daarom $y = 3k$, zodat de vergelijking overgaat in $3x^2 = 9 + 3^3k^3$, oftewel $x^2 = 3 + 9k^3$. Maar dan moet x^2 en dus ook x wel deelbaar zijn door 3. We schrijven $x = 3l$ en komen uit op $9l^2 = 3 + 9k^3$, oftewel $3l^2 = 1 + 3k^3$. Dit is echter onmogelijk, want 1 is geen drievoud. We concluderen dat er dus niet x en y kunnen zijn met $3x^2 = 9 + y^3$. $\square$

Opgave 84. ***Tweede Ronde 2007*** *Is het mogelijk om de verzameling $A = \{1, 2, 3, \ldots, 32, 33\}$ op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.*

Uitwerking Stel dat er zo'n verdeling in elf deelverzamelingen bestaat. Elke deelverzameling bestaat uit drie getallen, zeg a, b en c, die voldoen aan $a + b = c$ en bijgevolg ook aan $a + b + c = 2c$. Dus voor elke deelverzameling is de som van de getallen even. Maar dan moet de som van alle getallen $1, 2, \ldots, 32, 33$ ook even zijn.

Echter $1 + 2 + 3 + \cdots + 33 = \frac{1}{2} \times 33 \times (33 + 1) = 33 \times 17$ en dat is een oneven getal. Tegenspraak. Dus er bestaat geen verdeling van A met de gewenste eigenschappen. $\square$

Opgave 85. *Bewijs dat de vergelijking $x^3 + x + 1$ geen rationale oplossingen heeft.*

Uitwerking We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat de vergelijking $x^3 + x + 1$ wel rationale oplossingen heeft, zeg $x = \frac{t}{n}$ (met t en n geheel). Door de gemeenschappelijke factoren uit de teller en de noemer weg te delen, kunnen we de breuk zodanig vereenvoudigen dat $\text{ggd}(t, n) = 1$. We gaan er nu dus van uit dat we zo'n rationale oplossing $x = \frac{t}{n}$ hebben met t en n geheel en met $\text{ggd}(t, n) = 1$. Omdat $x = \frac{t}{n}$ een oplossing is, geldt $(\frac{t}{n})^3 + \frac{t}{n} + 1 = 0$. Door links en rechts met n^3 te vermenigvuldigen, komen we uit op

$$t^3 + tn^2 + n^3 = 0.$$

We bekijken nu het linkerlid $t^3 + tn^2 + n^3$ van deze vergelijking. Daarbij onderscheiden we, afhankelijk van de pariteit (even/oneven) van n en t, de volgende gevallen:

- t is even en n is oneven. Dan is het linkerlid even + even + oneven, dus oneven.
- t is oneven en n is even. Dan is het linkerlid oneven + even + even, dus oneven.
- t is oneven en n is oneven. Dan is het linkerlid oneven + oneven + oneven, dus oneven.
- t is even en n is even. Maar dit geval kan niet gebeuren, want dan zouden t en n een priemfactor 2 gemeenschappelijk hebben.

In alle drie de gevallen die kunnen gebeuren, zien we dat het linkerlid van de vergelijking $t^3 + tn^2 + n^3 = 0$ oneven is. Het rechterlid is echter 0, dus even. Dus iets wat oneven is, is gelijk aan iets wat even is; tegenspraak. Dus de aanname was onjuist zodat we kunnen concluderen dat de oorspronkelijke vergelijking x^3+x+1 geen rationale oplossingen heeft. $\square$

Opgave 86. *Stel dat a een natuurlijk getal is zodanig dat $\sqrt{a}$ geen natuurlijk getal is. Bewijs dat $\sqrt{a}$ ook geen breuk is.*

Uitwerking Wegens de priemfactorisatie van natuurlijke getallen weten we dat een getal een perfect kwadraat is (dat wil zeggen: het kwadraat van een natuurlijk getal) precies dan als alle priemfactoren een even aantal keer voorkomen. Nu is gegeven dat a geen perfect kwadraat is. Er is dan dus een priemfactor, zeg p, die een oneven aantal keer voorkomt. De rest van het bewijs gaat uit het ongerijmde, analoog aan voorbeeld 19.
Veronderstel dat $\sqrt{a}$ wel een rationaal getal is. Dan is $\sqrt{a}$ gelijk aan $\frac{t}{n}$ voor zekere gehele

getallen t en n. Dus dan geldt $a = \frac{t^2}{n^2}$, oftewel $a \cdot n^2 = t^2$. We noemen dit laatste getal even N, dus $N = a \cdot n^2$ maar ook $N = t^2$. Kijk nu naar het aantal priemfactoren p in N. Volgens de uitdrukking $N = a \cdot n^2$ heeft N een oneven aantal priemfactoren p. Maar volgens de uitdrukking $N = t^2$ heeft N juist een even aantal priemfactoren p. Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat $\sqrt{a}$ een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus $\sqrt{a}$ is geen breuk. $\square$

13 Extremenprincipe

De burgemeester van het dorpje Langeland wil een nieuwe wet invoeren: voortaan moet iedere inwoner de naam kennen van een medeburger die langer is dan hijzelf (of zijzelf). Om na te gaan of zijn wet uitvoerbaar is, stuurt de burgemeester een ambtenaar langs alle deuren. De ambtenaar moet van elke inwoner de lengte opschrijven om zo te achterhalen of er wel voor elk persoon een dorpsgenoot is die langer is.

Je begrijpt natuurlijk wel dat dit niet de meest efficiënte methode is. Het is direct duidelijk dat deze wet niet uitvoerbaar is, omdat er een langste inwoner van het dorp is. Je weet misschien niet wie de langste inwoner is, maar het is zeker dat er iemand is die minstens even lang is als al zijn dorpsgenoten. Er kunnen trouwens best meerdere inwoners zijn die allemaal de langste zijn; dan kunnen ze allemaal geen naam noemen van een langere dorpsgenoot. In elk geval is er minstens één langste inwoner, omdat er slechts eindig veel inwoners zijn.

Het idee van het extremenprincipe is om naar een extreem te kijken: een langste inwoner, een kleinste getal, een grootste verzameling, noem maar op. Ook al kun je zo'n extreem niet altijd expliciet aanwijzen, je weet vaak wel dat er eentje is.

Let op: niet in alle situaties weet je dat zo'n extreem bestaat! Er is bijvoorbeeld geen grootste natuurlijk getal. In andere woorden, als de inwoners van Langeland geen mensen maar natuurlijke getallen waren geweest, dan had de burgemeester zijn wet kunnen invoeren: elk natuurlijk getal n kan een getal noemen dat groter is, bijvoorbeeld $n + 1$.

Laten we eens kijken hoe we dit principe kunnen gebruiken in wiskundige bewijzen.

Voorbeeld 21. *De burgemeester van Langeland besluit zijn wet toch in te voeren. Bovendien laat hij elke dag elke burger ondervragen; als iemand geen naam kan noemen van een langere dorpsgenoot, wordt hij verbannen uit het dorp.*
Bewijs dat uiteindelijk alle burgers verbannen worden.

Oplossing We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat *niet* alle burgers verbannen worden. Dan houdt het verbannen van burgers op

een zeker moment op. Noem B de groep burgers die dan nog over is. Van deze burgers wordt dus niemand meer verbannen. We nemen aan dat er minstens één burger tot B behoort. Er behoren eindig veel burgers tot B, dus er is een langste burger in deze groep. De eerstvolgende dag dat hij ondervraagd wordt, kan hij geen naam noemen van een langere dorpsgenoot, dus wordt hij verbannen. Dit is een tegenspraak met de aanname dat niemand uit B nog verbannen werd. We concluderen dat er helemaal niemand overblijft. $\square$

Hoewel het intuïtief direct duidelijk is dat alle burgers verbannen worden, is het best lastig om een bewijs op te schrijven dat echt waterdicht is. Het extremenprincipe helpt je hiermee. Zoals je ziet, wordt het bewijs met behulp van het extremenprincipe kort en is er geen speld tussen te krijgen.

Voorbeeld 22. *Bewijs dat er geen positieve gehele getallen x en y zijn die voldoen aan $x^2 + 2y^2 = 4xy$.*

Oplossing We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat er *wel* paren (x, y) bestaan met $x^2 + 2y^2 = 4xy$. Misschien zijn dat er heel veel, misschien is het er maar één; dat weten we niet. Maar we kunnen wel alle paren die voldoen, op een rijtje zetten en van al deze paren de waarde van x bekijken. Dat zijn positieve gehele getallen, dus daar is een kleinste waarde bij. Noem nu (x_0, y_0) een paar met de kleinste x. (Als er meerdere paren zijn met dezelfde kleinste x, kiezen we er willekeurig eentje.) Voor alle paren (x, y) met $x^2 + 2y^2 = 4xy$ geldt nu $x \geq x_0$.

Omdat $2y_0^2$ en $4x_0y_0$ allebei even zijn, moet x_0^2 ook even zijn. Dus x_0 is deelbaar door 2. Definieer $x_1 = \frac{x_0}{2}$. Dan is x_1 een positief geheel getal. Dit vullen we in in de vergelijking: $4x_1^2 + 2y_0^2 = 8x_1y_0$. We delen deze hele vergelijking door twee en krijgen $2x_1^2 + y_0^2 = 4x_1y_0$. Nu zien we dat y_0^2 even moet zijn, omdat $2x_1^2$ en $4x_1y_0$ allebei even zijn. Dus ook y_0 is deelbaar door 2. Definieer $y_1 = \frac{y_0}{2}$. Dit vullen we weer in: $2x_1^2 + 4y_1^2 = 8x_1y_1$. Opnieuw delen we door 2 en dan komen we uit op $x_1^2 + 2y_1^2 = 4x_1y_1$. Dit lijkt wel erg op onze oorspronkelijke vergelijking. Kennelijk is (x_1, y_1) ook een oplossing van de vergelijking. Maar $x_1 = \frac{x_0}{2} < x_0$ en dat is in tegenspraak met de aanname dat x_0 de kleinste x was. We concluderen dat er helemaal geen paren (x, y) met $x^2 + 2y^2 = 4xy$ bestaan. $\square$

Het is de kunst om een geschikt extreem te kiezen. We hadden in het voorbeeld hierboven ook naar de waarden van $x + y$ kunnen kijken in plaats van naar de waarden van x en dan waren we twee keer zo snel klaar geweest. Stel namelijk dat (x_2, y_2) een tweetal is met de kleinste waarde van $x + y$. Voor alle paren (x, y) met $x^2 + 2y^2 = 4xy$ geldt nu $x + y \geq x_2 + y_2$. Op dezelfde manier als hierboven zien we dan dat x_2 even moet zijn. Als we $x_3 = \frac{x_2}{2}$ definiëren, komen we zo uit op de vergelijking $2x_3^2 + y_2^2 = 4x_3y_2$. Dit is de oorspronkelijke vergelijking, maar dan met x en y omgewisseld. Kennelijk is (y_2, x_3) ook een oplossing. Voor deze oplossing geldt $x + y = y_2 + x_3 = y_2 + \frac{x_2}{2} < y_2 + x_2$ en dat is in tegenspraak met de aanname.

De volgende opgaven kunnen allemaal opgelost worden met behulp van het extremenprincipe. Maar het is niet altijd makkelijk om een goed extreem te kiezen!

Opgave 87. *Twintig kinderen staan in een cirkel op zo'n manier dat de leeftijd van elk kind precies het gemiddelde is van de leeftijden van zijn twee buren. Bewijs dat alle kinderen even oud zijn.*

Uitwerking Bekijk het jongste kind en noem hem even A. Zijn leeftijd is het gemiddelde van de leeftijden van zijn buren. Allebei de buren zijn minstens even oud als A. Als een van beide ouder zou zijn dan A, dan zou het gemiddelde van de twee leeftijden groter zijn dan de leeftijd van A, maar dat kan niet. Dus allebei de buren van A zijn precies even oud als A. Maar dan kunnen we dezelfde redenering toepassen op elk van de buren van A, dus zijn hun buren op hun beurt ook precies even oud. Zo gaan we door. Uiteindelijk kunnen we concluderen dat alle kinderen precies even oud zijn. □

Opgave 88. *Laat S een verzameling natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:*

- *als een even getal $2n$ in S zit, dan zit n ook in S,*
- *als een getal n in S zit, dan zit $n+1$ ook in S,*
- *het getal 2008 zit in S.*

Bewijs dat alle natuurlijke getallen in S zitten.

Uitwerking We weten dat er minstens één getal in S zit, omdat 2008 er in elk geval in zit. Bekijk het kleinste getal a dat in S zit. We gaan bewijzen dat $a = 1$. Als a even zou zijn, dan zou ook $\frac{a}{2}$ in S zitten. Maar $\frac{a}{2} < a$, dus dan zou a niet het kleinste getal in S zijn. Tegenspraak. Dus a is oneven. Nu zit ook $a+1$ in S en daarom ook $\frac{a+1}{2}$. Omdat a het kleinste getal in S is, moet wel gelden $\frac{a+1}{2} \geq a$. Dat kunnen we herschrijven tot $a+1 \geq 2a$, dus $1 \geq a$. Omdat a een positief geheel getal is, volgt hieruit $a = 1$. Vanwege de tweede eigenschap van S zit nu ook 2 in S, en dus ook 3, en dus ook 4, etc. Conclusie: S bevat alle natuurlijke getallen. □

Opgave 89. *Bewijs dat er geen positieve gehele getallen x, y en z zijn die voldoen aan $x^3 + 3y^3 = 9z^3$.*

Uitwerking We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat er wel drietallen (x, y, z) zijn met $x^3 + 3y^3 = 9z^3$. Laat (x_0, y_0, z_0) een drietal zijn met de kleinste waarde van x_0. Omdat $3y_0^3$ en $9z_0^3$ deelbaar zijn door 3, is x_0^3 ook

deelbaar door 3 en dus x_0 ook. Schrijf $x_0 = 3x_1$ en vul dit in: $27x_1^3 + 3y_0^3 = 9z_0^3$. We kunnen de vergelijking door 3 delen: $9x_1^3 + y_0^3 = 3z_0^3$. Nu zien we dat y_0 deelbaar is door 3. Schrijf $y_0 = 3y_1$, vul dit in en deel weer alles door 3, dan krijgen we $3x_1^3 + 9y_1^3 = z_0^3$. Nu is ten slotte z_0 deelbaar door 3. Schrijf $z_0 = 3z_1$ en vul dit weer in: $x_1^3 + 3y_1^3 = 9z_1^3$. Dit is de vergelijking waarmee we begonnen zijn, dus (x_1, y_1, z_1) is ook een oplossing. Maar $x_1 = \frac{x_0}{3} < x_0$ en dat is een tegenspraak met de minimaliteit van x_0. Dus dit kan niet. We concluderen dat er helemaal geen drietallen (x, y, z) zijn met $x^3 + 3y^3 = 9z^3$. □

Opgave 90. *Een eindig aantal steden is verbonden door een aantal éénrichtingsverkeerwegen. Voor elk tweetal steden X en Y is het mogelijk om via een aantal van deze wegen van X naar Y te komen of van Y naar X te komen. Bewijs dat er een stad is die vanuit elke andere stad bereikbaar is.*

Uitwerking Tel voor elke stad het aantal andere steden waarvandaan deze stad bereikbaar is. Noem M het maximum van deze aantallen en laat A een stad zijn die vanuit M andere steden bereikbaar is. We gaan laten zien dat A vanuit alle andere steden bereikbaar is. We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel er is nog een andere stad B waarvandaan A niet bereikbaar is. Dan is B wel vanuit A bereikbaar. Van elk van de M steden waarvandaan A bereikbaar is, kun je nu ook B bereiken: eerst naar A en vervolgens over de route van A naar B. (Geen van deze M steden is natuurlijk gelijk aan B, want vanuit B was A juist niet bereikbaar.) Ook vanuit A kun je B bereiken, dus B is te bereiken vanuit minstens $M + 1$ steden. Tegenspraak, want M was maximaal. Dus A is vanuit alle andere steden bereikbaar. □

Opgave 91. *Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, waarbij er altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met daarop*

1. *de namen van alle deelnemers die hij verslagen heeft,*

2. *de namen van alle deelnemers die verslagen zijn door iemand die bij punt 1 genoemd is.*

De deelnemers schrijven geen namen dubbel op.
Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

Uitwerking Bekijk een deelnemer A met de langste lijst namen. We gaan bewijzen dat op zijn lijst alle andere namen voorkomen. We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat er nog een deelnemer B is die niet voorkomt op de lijst van A. Dat betekent ten eerste dat B niet verslagen is door A (dus A is verslagen door B) en ten tweede dat B niet verslagen is door iemand die door A verslagen is (dus al deze deelnemers zijn door B verslagen). We zien dat zowel A als alle mensen die door A verslagen zijn, bij punt 1

op de lijst van B staan. Bovendien staan alle namen die A bij punt 2 had opgeschreven, ook bij B op de lijst. Immers, B heeft alle deelnemers verslagen die ook door A verslagen zijn. Kortom, alle deelnemers die bij A op de lijst staan, staan bij B ook op de lijst, maar bovendien staat A ook op de lijst van B. Dus de lijst van B is langer dan die van A, tegenspraak. We concluderen dat A al alle andere namen op zijn lijst moet hebben. □

Opgave 92. ***Tweede Ronde 2000*** *Er staan vijftien spelers op een veld, elk met een bal. De afstanden tussen elk tweetal spelers zijn alle verschillend. Elke speler gooit de bal naar die speler die het dichtst bij hem staat. Bewijs dat er minstens één speler is naar wie geen bal gegooid wordt.*

Uitwerking Bekijk alle afstanden tussen tweetallen spelers en kies de kleinste afstand. De twee spelers die op die afstand van elkaar staan, gooien hun bal naar elkaar. Laat nu deze twee spelers buiten beschouwing en bekijk alle afstanden tussen de andere dertien spelers. De twee spelers daarvan die de kleinste afstand tot elkaar hebben, gooien hun bal naar elkaar of naar één van de spelers die we buiten beschouwing hebben gelaten. In elk geval gooien ze hun bal niet naar de andere elf spelers. Nu laten we deze twee spelers weer buiten beschouwing en zo gaan we door. Op deze manier delen we veertien van de vijftien spelers op in paren die hun bal naar elkaar gooien of naar spelers uit eerder gekozen paren. Geen van deze veertien spelers gooit een bal naar de vijftiende speler, dus deze speler krijgt geen bal. □

Opgave 93. ***Tweede Ronde 1995*** *We beschouwen de rijtjes* $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ *van dertien gehele getallen die in oplopende volgorde staan, dus* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{13}$ *. Zo'n rijtje heet "tam" indien voor iedere* i *met* $1 \leq i \leq 13$ *geldt: als je* a_i *uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is.*

(a) *Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even of geheel uit oneven getallen bestaat.*

Een tam rijtje heet "turbo-tam" als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.

(b) *Bewijs dat in ieder turbo-tam rijtje alle getallen gelijk zijn.*

Uitwerking

(a) Noem S de som van de dertien getallen. Voor elke i kunnen we de overige twaalf getallen (met som $S - a_i$) opdelen in twee groepjes met dezelfde som, die natuurlijk een geheel getal is. Dus $S - a_i$ is voor alle i even. Dus als S even is, dan zijn alle a_i'tjes even; als S oneven is, dan zijn alle a_i'tjes oneven.

(b) Als $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ een turbo-tam rijtje is, dan is $(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{13} - a_1)$ ook een turbo-tam rijtje. Bekijk nu alle turbo-tamme rijtjes $(0, b_2, b_3, \ldots, b_{13})$ die beginnen met een 0. We willen bewijzen dat al deze rijtjes alleen maar nullen bevatten; dan zijn we klaar. We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dat er turbo-tamme rijtjes zijn die met een 0 beginnen en niet alleen nullen bevatten. In al deze rijtjes is dan in elk geval b_{13} een positief geheel getal. Laat $(0, c_2, c_3, \ldots, c_{13})$ een turbo-tam rijtje zijn met de kleinste positieve b_{13}. Voor elk ander turbo-tam rijtje $(0, b_2, b_3, \ldots, b_{13})$ dat niet alleen uit nullen bestaat, geldt dus $b_{13} \geq c_{13}$. Uit onderdeel a van deze opgave volgt dat c_i even is voor alle i, want 0 is even. Maar dan is $(0, \frac{c_2}{2}, \frac{c_3}{2}, \ldots, \frac{c_{13}}{2})$ ook een turbo-tam rijtje. Er geldt $\frac{c_{13}}{2} < c_{13}$, tegenspraak. We concluderen dat er geen turbo-tamme rijtjes zijn die beginnen met een 0 en daarnaast nog een positief getal bevatten. Daaruit volgt dat er geen turbo-tamme rijtjes zijn waarin niet alle getallen gelijk zijn.

□

14 Ladenprincipe

Als je 7 knikkers in 6 laatjes doet, dan weet je zeker dat er ten minste 1 laatje is met ten minste 2 knikkers erin. We kunnen dat bewijzen uit het ongerijmde: zou namelijk elk laatje ten hoogste maar 1 knikker bevatten, dan zouden er in totaal maar ten hoogste 6 knikkers in gezeten hebben; tegenspraak. Dit principe blijkt soms heel handig van pas te komen. We noemen het het *ladenprincipe*. Om het goed te kunnen toepassen, moet je meestal even goed bedenken wat de knikkers en wat de laatjes zijn én op grond van welke regel je elke knikker in een bepaald laatje doet; dan heeft het feit dat er twee knikkers bij elkaar in één laatje terecht komen als het goed is precies het gewenste resultaat. We bekijken twee voorbeelden.

Voorbeeld 23. *Iemand heeft zes verschillende willekeurige getallen tussen de 1 en de 10 opgeschreven (waarbij 1 en 10 ook mogen). Bewijs dat hij twee buurgetallen heeft opgeschreven. (Buurgetallen zijn getallen die 1 verschillen.)*

Oplossing We maken laden met de labels (stickers) $\{2k-1, 2k\}$ $(k = 1, \ldots, 5)$, oftewel

$$\{1, 2\} \quad \{3, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \{7, 8\} \quad \{9, 10\}$$

en daarover gaan we zometeen de opgeschreven getallen verdelen (die dus de rol van knikkers hebben). Alle laden zijn in eerste instantie nog leeg. Stop nu elk opgeschreven getal in de lade volgens de aangegeven labels. Als bijvoorbeeld het getal 4 was opgeschreven, dan komt dat in het laatje $\{3, 4\}$ omdat daar het label 4 op staat. Aangezien er maar vijf laden zijn en we daar zes getallen (knikkers) over verdelen, moet er wegens het ladenprincipe na afloop ten minste één lade zijn met meer dan één getal. Dat moeten dan wel twee getallen zijn van de vorm $2k - 1$ en $2k$ en dat zijn duidelijk buurgetallen. $\square$

Voorbeeld 24. *In een zaal zit een groep van 20 mensen. Elke persoon in de groep moet op een briefje drie verschillende positieve gehele getallen schrijven, kleiner dan 10. Vervolgens moet iedereen de som van het drietal getallen bepalen. Bewijs dat er minstens twee mensen in deze groep zijn die precies dezelfde som als resultaat hebben.*

Oplossing De laagst mogelijke som is $1 + 2 + 3 = 6$; de hoogste mogelijke $7 + 8 + 9 = 24$. De mogelijke uitkomsten voor de som zijn dus $6, 7, 8, \ldots, 23, 24$ en als we goed tellen zien we dat dat $24 - 6 + 1 = 19$ verschillende waarden zijn. Neem dit nu als laatjes. We zien de mensen nu als de knikkers en stoppen ze in een bepaald laatje afhankelijk van de som van hun getallen. Omdat we nu 20 mensen (knikkers) verdelen over 19 laatjes, moet wegens het ladenprincipe minstens één laatje dubbel bezet zijn. Oftewel: er moet minstens één waarde meer dan eens voorkomen. $\square$

Opgave 94. *Amersfoort heeft 139.054 inwoners (2 mei 2008). Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amersfoort zeker twee mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.*

Uitwerking Neem als laden {de kale Amersfoorters}, {de Amersfoorters met 1 haar}, ..., {de Amersfoorters met 100.000 haren}. In deze 100.001 laden plaatsen we alle 139.054 Amersfoorters (knikkers) afhankelijk van het aantal haren dat ze op hun hoofd hebben. Omdat $139.054 > 100.001$, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens 2 Amersfoorters erin. Deze twee mensen hebben dan evenveel haren. $\square$

Opgave 95. *Bewijs dat in 2008 in een groepje van 15 mensen er altijd twee jongens of twee meisjes op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee jongens op dinsdag of twee meisjes op zaterdag).*

Uitwerking Neem 14 laden en wel één voor elke combinatie van weekdag en geslacht:

$$\{\text{maandag-jongens}\}, \{\text{maandag-meisjes}\}, \{\text{dinsdag-jongens}\}, \ldots$$

In deze 14 laden verdeel je 15 mensen (knikkers), afhankelijk van de weekdag waarop ze jarig zijn en hun geslacht. Omdat $15 > 14$, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens 2 mensen erin. Dat zijn dus twee mensen van hetzelfde geslacht die ook nog eens op dezelfde weekdag jarig zijn.
Alternatief: maak eerst 2 laden: {jongens} en {meisjes}. Als je hier 15 mensen over

verdeelt, moet een van de twee laden ten minste 8 personen bezitten, anders zouden er in totaal maar hooguit $2 \cdot 7 = 14$ personen zijn geweest. Zeg dat de jongenslade ten minste 8 personen bezit. (Voor de meisjeslade gaat het verhaal analoog.) Pas nu het ladenprincipe toe op deze groep van ten minste 8 jongens en met de 7 laatjes

$$\{\text{maandag}\}, \{\text{dinsdag}\}, \ldots$$

Ten minste een laatje zal minstens dubbel worden gevuld en wel met twee jongens die op dezelfde dag van de week jarig zijn.
Alternatief: maak eerst 7 laden: {maandag}, {dinsdag}, ... Als je hier 15 mensen over verdeelt, moet een van de 7 laden ten minste 3 personen bezitten, anders zouden er in totaal maar hooguit $7 \cdot 2 = 14$ personen zijn geweest. Zeg dat de maandaglade ten minste 3 personen bezit. (Voor de andere lades gaat het verhaal analoog.) Pas nu het ladenprincipe toe op deze groep van ten minste 3 personen en met de laatjes {jongens} en {meisjes}. Ten minste een laatje zal minstens dubbel worden gevuld en wel met twee jongens of twee meisjes die op dezelfde dag van de week jarig zijn. □

Opgave 96. *Hoeveel torens kunnen er ten hoogste op een schaakbord staan zodanig dat geen enkele toren een andere toren kan slaan?*

Uitwerking Het lukt in ieder geval met 8 torens; zet die allemaal maar op de diagonaal bijvoorbeeld, dan staat elke toren op een andere rij en een andere kolom, dus dan kunnen die 8 torens elkaar niet slaan.
We gaan nu bewijzen dat als er 9 of meer torens zijn, er altijd minstens twee elkaar wel kunnen slaan. De vakjes van het schaakbord geven we coördinaten bestaande uit een letter en een cijfer. De letter geeft de kolom aan en het cijfer de rij. Linksonder heet A1 en rechtsboven heet H8. Label de (oorspronkelijk lege) laden met de rijnummers 1, 2, 3, . . . , 8. In deze 8 laden plaatsen we de 9 of meer torens (knikkers), afhankelijk van hun rijnummer. Omdat er meer dan 8 torens zijn, volgt uit het ladenprincipe dat er een la is met minstens twee torens erin. Die twee torens hebben dan dus hetzelfde rijnummer en kunnen elkaar slaan, tenzij er nog een toren tussen staat. In geval er meer dan twee torens in de lade zitten, willen we dus wel zeker twee torens hebben waar alleen lege velden tussen zitten. We kiezen daarom uit deze lade de twee torens met de laagste kolomletters. Omdat er zich alleen maar lege velden tussen deze twee torens bevinden, kunnen die elkaar inderdaad slaan.
Bij 9 of meer torens gaat het dus altijd mis. In het begin hebben we laten zien dat het met 8 torens wel mogelijk is om ze zo neer te zetten dat geen enkele toren een andere toren kan slaan. Daarmee hebben we dus laten zien dat 8 torens het hoogste aantal is. □

Opgave 97. *Laat 51 verschillende getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen).*
(a) *Bewijs dat er een tweetal is met som 101.*
(b) *Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.*

Uitwerking **(a)** Neem als laden: $\{1, 100\}$, $\{2, 99\}$, $\ldots$, $\{k, 101 - k\}$, $\ldots$, $\{50, 51\}$. Dit zijn 50 laden en daarover verdelen we $51 > 50$ gegeven getallen (knikkers). Dus komen er wegens het ladenprincipe twee getallen bij elkaar in een laatje. Dat moeten dan wel de getallen k en $101 - k$ zijn (voor zekere k), want zo hadden we de labeltjes gekozen. Hun som is inderdaad 101.
(b) Neem als laden: $\{1, 51\}$, $\{2, 52\}$, $\ldots$, $\{k, 50 + k\}$, $\ldots$, $\{50, 100\}$. Dit zijn 50 laden en daarover verdelen we $51 > 50$ gegeven getallen (knikkers). Dus komen er wegens het ladenprincipe twee getallen bij elkaar in een laatje. Dat moeten dan wel de getallen k en $50 + k$ zijn (voor zekere k), want zo hadden we de labeltjes gekozen. Hun verschil is inderdaad 50. $\square$

Opgave 98. ***Tweede Ronde 1977*** *Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal (minstens één) kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.*

Uitwerking Noem de zeven gegeven positieve gehele getallen $x_1, \ldots, x_7$. Bekijk $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$, $\ldots$, $s_7 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Als een van deze zeven getallen een zevenvoud is, dan ben je klaar. Zo niet, dan hebben ze allemaal een rest bij deling door 7. Die rest varieert van 1 tot en met 6; dat nemen we als laatjes. Daarover verdelen we de zeven getallen (knikkers) s_1 tot en met s_7, afhankelijk van hun rest bij deling door 7. Van die zeven getallen zijn er wegens het ladenprincipe dus twee met dezelfde rest. In dat geval is het verschil van die twee getallen een zevenvoud en zijn we ook klaar. $\square$

Opgave 99. ***Tweede Ronde 2001*** *Als je uit de gehele getallen 1 t/m 6003 een deelverzameling pakt van 4002 getallen, dan is er binnen die deelverzameling altijd weer een deelverzameling van 2001 getallen te vinden met de volgende eigenschap:*
als je de 2001 getallen ordent van klein naar groot, dan zijn de getallen afwisselend even en oneven (of oneven en even).
Bewijs dit.

Uitwerking Verdeel de getallen in 3002 groepjes, namelijk de 3001 groepjes van twee getallen $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \ldots, (6001, 6002)$ en één groepje met één getal (6003). Als je uit deze 3002 groepjes er 1001 uitkiest dan heb je in totaal 2002 of 2001 getallen (2001 indien je het groepje (6003) bij de 1001 groepjes hebt gekozen). Als je de getallen uit de gekozen 1001 groepjes achter elkaar plaatst dan heb je een rij van 2002 (of 2001) getallen die afwisselend oneven, even, oneven, ... zijn. Ze voldoen dan aan de gestelde eis. We laten zien dat je altijd 1001 groepjes kunt vinden binnen een deelverzameling van 4002 getallen.

Laat een willekeurige deelverzameling van 4002 getallen tussen de 1 en 6003 gegeven zijn. De 2001 getallen die niet in de deelverzameling zitten, strepen we door. Die 2001 getallen zitten in maximaal 2001 verschillende groepjes van de in totaal 3002 groepjes. Laat alle groepjes waarin minstens één doorgestreept getal zit buiten beschouwing, dan blijven er

dus minimaal $3002 - 2001 = 1001$ groepjes over waarin geen getal is doorgestreept. Die 1001 groepjes leveren een rij van minstens 2001 getallen op die aan de gestelde eis voldoet.
$\square$