NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets III

zaterdag 9 juni 2018

Uitwerkingen

Opgave 1. Een verzameling lijnen in het vlak noemen we *mooi* indien elke lijn in de verzameling een oneven aantal van de andere lijnen in de verzameling snijdt.
Bepaal het kleinste gehele getal $k \geq 0$ met de volgende eigenschap: voor iedere 2018 verschillende lijnen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{2018}$ in het vlak bestaan er lijnen $\ell_{2018+1}, \ell_{2018+2}, \ldots, \ell_{2018+k}$ zodat de lijnen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{2018+k}$ allemaal verschillend zijn en een mooie verzameling vormen.

Oplossing. We bewijzen eerst dat in een mooie verzameling het aantal lijnen even moet zijn. Stel namelijk dat het aantal lijnen oneven zou zijn. Dan ligt op elk van het oneven aantal lijnen een oneven aantal snijpunten, dus het totale aantal snijpunten is dan ook oneven. Elk snijpunt wordt hier echter twee keer geteld (één keer voor elke lijn waar hij op ligt), dus het totaal zou even moeten zijn. Tegenspraak. Dus het aantal lijnen in een mooie verzameling moet even zijn. In het bijzonder moet $2018 + k$ ook even zijn, dus k moet even zijn.
Stel nu dat er 1009 richtingen zijn zodat er in elke richting twee van de oorspronkelijke lijnen liggen. Dan is elke lijn evenwijdig met precies één andere lijn. Als $k < 1010$ is $k \leq 1008$, dus moet er een richting zijn waarin we geen lijn toevoegen. Bekijk een oorspronkelijke lijn ℓ in deze richting. Die snijdt in de uiteindelijke verzameling alle lijnen behalve zichzelf en de lijn waar hij evenwijdig mee was. Dit is een even aantal. Dus dan is de resulterende verzameling niet mooi. Er is dus een voorbeeld waarbij minstens 1010 lijnen nodig zijn.
We laten nu zien dat het mogelijk is om precies 1010 lijnen toe te voegen zodat de totale verzameling uiteindelijk mooi is. We bekijken alle richtingen waarin een even aantal (groter dan 0) van de oorspronkelijke lijnen liggen. Er zijn hoogstens 1009 van zulke richtingen. Voor elk van deze richtingen voegen we een lijn toe. Elke lijn loopt dan evenwijdig aan een even aantal (mogelijk 0) andere lijnen. Stel eerst dat het totaal aantal lijnen nu even is. Dan snijdt elke lijn een oneven aantal lijnen (het totaal minus zichzelf en een even aantal andere lijnen). Stel nu dat het totaal aantal lijnen nu oneven is. Dan snijdt elke lijn een even aantal lijnen. We voegen een lijn toe in een nieuwe richting die dus alle lijnen snijdt (een oneven aantal), zodat daarna elke lijn een oneven aantal andere lijnen snijdt.
Nu is de verzameling mooi en we hebben hooguit $1009 + 1 = 1010$ lijnen toegevoegd. Mogelijk zijn het er echt nog minder dan 1010. In dat geval is het aantal toegevoegde lijnen wel even, want het totaal aantal lijnen van een mooie verzameling is altijd even. We kiezen een richting waarin al minstens één lijn loopt. We voegen nu steeds een tweetal lijnen in diezelfde richting toe. Deze lijnen snijden alle lijnen in andere richtingen; dat is totaal een oneven aantal. Die andere lijnen hebben er elk twee snijpunten bijgekregen,

dus zij houden een oneven aantal snijpunten. Dat laatste geldt ook voor de lijnen die er al waren in de gekozen richting, want zij krijgen nul nieuwe snijpunten. De verzameling blijft dus mooi. We voegen net zo lang zulke tweetallen toe totdat we in totaal 1010 lijnen hebben toegevoegd.
We concluderen dat de minimale k die voldoet $k = 1010$ is. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor

$$f(x^2) - f(y^2) \leq \big(f(x) + y\big)\big(x - f(y)\big)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing I. Invullen van $x = y = 0$ geeft $0 \leq f(0) \cdot -f(0)$. Maar kwadraten zijn niet-negatief, dus hieruit volgt $f(0)^2 = 0$ en daarmee $f(0) = 0$. Nu geeft $x = 0$ en $y = t$ dat $-f(t^2) \leq t \cdot -f(t)$, terwijl $x = t$ en $y = 0$ geeft dat $f(t^2) \leq f(t) \cdot t$. We vinden $tf(t) \leq f(t^2) \leq tf(t)$, dus $f(t^2) = tf(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. We kunnen nu links in de functieongelijkheid $f(x^2) - f(y^2)$ vervangen door $xf(x) - yf(y)$. Door rechts haakjes uit te werken krijgen we daar $xf(x) - yf(y) + xy - f(x)f(y)$, dus krijgen we

$$f(x)f(y) \leq xy.$$

Uit $f(t^2) = tf(t)$ volgt $f(1) = -f(-1)$. Door nu eerst $y = 1$ te nemen en daarna $y = -1$, krijgen we voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$x \geq f(x)f(1) = -f(x)f(-1) \geq -x \cdot -1 = x.$$

Dus er moet steeds gelijkheid gelden, wat betekent dat $f(x)f(1) = x$. Hieruit volgt in het bijzonder $f(1)^2 = 1$, dus $f(1) = 1$ of $f(1) = -1$. In het eerste geval krijgen we $f(x) = x$ voor alle x en in het tweede geval $f(x) = -x$ voor alle x.
Als we $f(x) = x$ controleren in de oorspronkelijke functieongelijkheid, komt er links $x^2 - y^2$ en rechts $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, dus deze functie voldoet. Als we $f(x) = -x$ controleren, komt er links $-x^2 + y^2$ en rechts $(-x+y)(x+y) = -x^2 + y^2$, dus deze functie voldoet ook. We concluderen dat de oplossingen zijn: $f(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $f(x) = -x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Oplossing II. Net als in oplossing I leiden we af dat $f(0) = 0$ en $f(t^2) = tf(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Daaruit volgt

$$tf(t) = f(t^2) = f\big((-t)^2\big) = -tf(-t),$$

dus voor $t \neq 0$ geldt $f(-t) = -f(t)$. We wisten al $f(0) = 0$, dus dit geldt ook voor $t = 0$. Vul nu $y = -x$ in in de functieongelijkheid:

$$0 \leq \big(f(x) - x\big)\big(x - f(-x)\big) = \big(f(x) - x\big)\big(x + f(x)\big) = f(x)^2 - x^2,$$

dus $f(x)^2 \geq x^2$. Anderzijds volgt uit het invullen van $y = x$ dat

$$0 \leq \big(f(x) + x\big)\big(x - f(x)\big) = x^2 - f(x)^2,$$

dus ook $f(x)^2 \leq x^2$. We concluderen dat $f(x)^2 = x^2$ en dus dat $f(x) = \pm x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. We hebben nu in elk geval de kandidaatoplossingen $f(x) = x$ voor alle x en $f(x) = -x$ voor alle x en deze voldoen (zoals in oplossing I). Nu willen we nog de mixfuncties uitsluiten.

Stel dat er $x \neq y$, allebei ongelijk aan 0, bestaan met $f(x) = x$ en $f(y) = -y$. Dan geldt $f(x^2) = xf(x) = x^2$ en $f(y^2) = yf(y) = -y^2$, zodat de functieongelijkheid geeft:

$$x^2 + y^2 \leq (x + y)(x - -y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

Dus $2xy \geq 0$. Maar x en y waren ongelijk aan 0, dus x en y zijn beide positief of beide negatief. Zeg zonder verlies van algemeenheid dat ze beide positief zijn. Neem vervolgens een $z < 0$. Dan geldt $f(z) = z$ of $f(z) = -z$, dus bovenstaande redenering kunnen we ook toepassen op het tweetal (z, x) (als $f(z) = -z$) of juist op (z, y) (als $f(z) = z$). Daaruit volgt dat z en x (of juist z en y) hetzelfde teken hebben, maar dat is een tegenspraak.
We concluderen dat voor alle $x, y \neq 0$ geldt dat $f(x) = x$ en $f(y) = y$ of juist $f(x) = -x$ en $f(y) = -y$. Omdat $f(0) = 0 = -0$ geldt dus voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $f(x) = x$ of voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $f(x) = -x$. Dus dit zijn de twee oplossingen. $\square$

Opgave 3. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen zodat $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ een tweemacht is.

Oplossing. We bepalen eerst de paren (a, b) met $\text{ggd}(a, b) = 1$. Er geldt

$$\begin{aligned}(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 2a^3 - 2b^3 \\ &= -a^3 - b^3 + 3ab(a+b) \\ &= -(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b) \\ &= (a+b)(-a^2 + ab - b^2 + 3ab) \\ &= (a+b)(-a^2 - b^2 + 4ab).\end{aligned}$$

Dit moet een tweemacht zijn. Omdat $a + b$ positief is, moet de andere factor ook positief zijn en zijn het dus beide tweemachten. Vanwege $\text{ggd}(a, b) = 1$ is minstens één van a en b oneven. Dan is $a^2 + b^2$ congruent aan 1 of 2 modulo 4, dus $-a^2 - b^2 + 4ab$ is congruent aan 3 of 2 modulo 4. Het moet echter een tweemacht zijn, dus het getal 3 modulo 4 is onmogelijk en in het geval 2 modulo 4 kan het alleen gelijk aan 2 zijn. We concluderen dat $-a^2 - b^2 + 4ab = 2$.
Stel dat $a + b$ minstens 8 is. Omdat het een tweemacht is, is het dan deelbaar door 8, dus kunnen we $b = 8m - a$ schrijven voor zekere positieve gehele m. Er geldt dan

$$\begin{aligned}2 &= -a^2 - b^2 + 4ab \\ &= -a^2 - (8m - a)^2 + 4a(8m - a) \\ &= -a^2 - 64m^2 + 16ma - a^2 + 32ma - 4a^2 \\ &= -6a^2 + 48ma - 64m^2,\end{aligned}$$

dus

$$1 = -3a^2 + 24ma - 32m^2.$$

Modulo 8 staat hier nu $1 \equiv -3a^2$. Als a even is, dan staat er rechts iets wat even is, en als a oneven is, dan staat er rechts -3 modulo 8. In beide gevallen klopt deze vergelijking niet modulo 8. We concluderen dat $a + b$ niet minstens 8 is. Omdat a en b beide minstens 1 zijn, moet $a + b$ dan gelijk zijn aan 2 of aan 4.

- Als $a + b = 2$, dan geldt $a = b = 1$. Nu is $-a^2 - b^2 + 4ab = 2$, dus het product van de twee factoren is inderdaad een tweemacht (namelijk 4). Dus $(1, 1)$ is een oplossing.

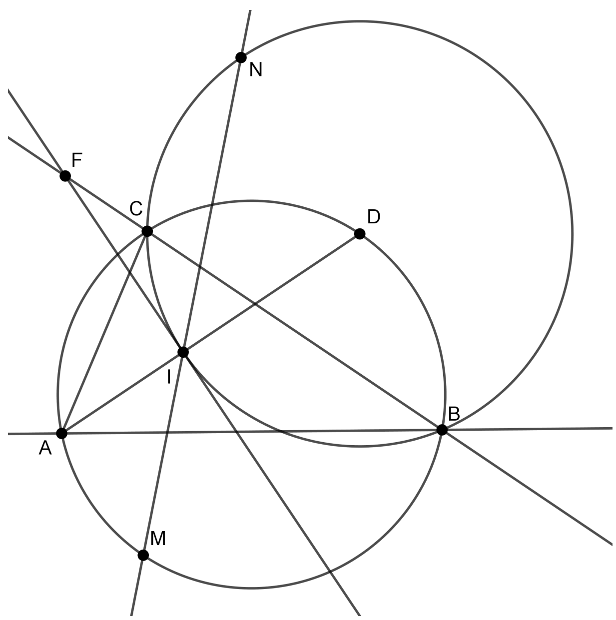
- Als $a + b = 4$, dan moet wegens $\text{ggd}(a, b) = 1$ gelden dat $a = 1$ en $b = 3$ of andersom. Nu is $-a^2 - b^2 + 4ab = 2$, dus ook nu is het product van de twee factoren een tweemacht (namelijk 8). Dus $(1, 3)$ en $(3, 1)$ zijn oplossingen.

Bekijk nu een oplossing (a, b) met $\text{ggd}(a, b) = d > 1$. Dan is d een deler van $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$, dus d moet zelf een tweemacht zijn. We zien nu dat $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ ook een oplossing is, want uit de tweemacht $(a+b)^3-2a^3-2b^3$ wordt d^3 weggedeeld, waardoor er weer een tweemacht overblijft. Dus $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ moet één van de drie eerder gevonden paren zijn. Andersom geeft elk van die drie paren vermenigvuldigd met een willekeurige tweemacht weer een oplossing. We concluderen dat alle oplossingen gegeven worden door

$$(a,b) = (2^k, 2^k), \quad (a,b) = (2^k, 3\cdot 2^k), \quad \text{en} \quad (a,b) = (3\cdot 2^k, 2^k),$$

waarbij k varieert over de niet-negatieve gehele getallen. $\square$

Opgave 4. In een niet-gelijkbenige driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. De bissectrice van $\angle BAC$ snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nogmaals in D. De lijn door I loodrecht op AD snijdt BC in F. Het midden van boog BC waar A op ligt, noemen we M. De lijn MI snijdt de cirkel door B, I en C nogmaals in N. Bewijs dat FN raakt aan de cirkel door B, I en C.



We bekijken de configuratie waar $|AB| > |AC|$ zodat C tussen B en F ligt. Andere configuraties gaan analoog.

Oplossing I. Omdat $\angle DAC = \angle BAD$ is D het midden van de boog BC waar A niet op ligt. De lijn DM is dus een middellijn van de cirkel. Met Thales zien we dan dat $\angle DBM = 90°$. Zij nu K het snijpunt van BC en DM. Omdat DM de middelloodlijn van BC is, geldt nu $\angle BKM = 90° = \angle DBM$. Dus $\triangle MKB \sim \triangle MBD$ (hh). Hieruit volgt $\frac{|MB|}{|MK|} = \frac{|MD|}{|MB|}$, dus $|MD| \cdot |MK| = |MB|^2$. Omdat K inwendig op MD ligt, geldt deze gelijkheid ook gericht: $MD \cdot MK = MB^2$.

Omdat D het midden van boog BC is, geldt $|DB| = |DC|$. Verder is $\angle CDI = \angle CDA = \angle CBA$ en $\angle DCI = \angle DCB + \angle BCI = \angle DAB + \angle BCI = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BCA$. Met de hoekensom in driehoek DCI zien we nu dat $\angle DIC = 180° - \angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB - \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BCA = \angle DCI$. Dus driehoek DCI is gelijkbenig met $|DC| = |DI|$. We conluderen dat D het middelpunt is van de cirkel door B, C en I. *(Dit noemen we ook wel de tussengeschreven cirkel.)* Nu is DB een straal van deze cirkel en DB staat loodrecht op MB, waaruit volgt dat MB een raaklijn is. Met de machtstelling weten we nu $MB^2 = MI \cdot MN$. Samen met het voorgaande concluderen we dat $MD \cdot MK = MI \cdot MN$. Dus vanwege de machtstelling is $NDKI$ een koordenvierhoek.

We weten ook dat $\angle FID = 90° = \angle FKD$, dus $DKIF$ is een koordenvierhoek. We concluderen dat $NDKIF$ een koordenvijfhoek is. Hieruit volgt $\angle DNF = 180° - \angle DIF = 90°$.

Dus NF staat loodrecht op de straal DN van de cirkel door B, I en C; dat betekent dat FN raakt aan deze cirkel. $\square$

Oplossing II. We definiëren net als in oplossing I punt K als het snijpunt van BC en DM en leiden af dat $\angle BKM = 90°$. Verder geldt wegens Thales dat $\angle DCM = 90° = \angle CKD$, dus $\triangle DCM \sim \triangle DKC$ (hh). Dus $\frac{|DC|}{|DM|} = \frac{|DK|}{|DC|}$, dus $|DC|^2 = |DM| \cdot |DK|$. Ook net als in oplossing I zien we dat D het middelpunt is van de cirkel door B, C en I. In het bijzonder geldt $|DI| = |DC|$, dus $|DI|^2 = |DM| \cdot |DK|$. Omdat K inwendig op MD ligt, geldt deze gelijkheid ook gericht: $DI^2 = DM \cdot DK$. Met de machtstelling volgt hieruit dat DI raakt aan de cirkel door I, K en M. De raaklijnomtrekshoekstelling zegt dan dat $\angle IMK = \angle DIK$.

Verder geldt $\angle DIF = 90° = \angle DKF$, dus $DKIF$ is een koordenvierhoek. Dus $\angle DIK = \angle DFK$ en samen met het voorgaande geeft dat $\angle IMK = \angle DFK$. Definieer nu X als het snijpunt van DF en NM. Dan zien we $\angle XMK = \angle IMK = \angle DFK = \angle XFK$, wat betekent dat $XKMF$ een koordenvierhoek is. Nu zien we $\angle FXM = \angle FKM = 90°$.

Dus FD staat loodrecht op IN. Omdat D het middelpunt is van de cirkel met koorde IN, is FD de middelloodlijn van IN. Dus I en N zijn elkaars gespiegelde in FD. Bij deze spiegeling gaat de cirkel door B, I en C in zichzelf over, dus raaklijn FI gaat over in raaklijn FN. $\square$