IMO-selectietoets III

zaterdag 9 juni 2018

Opgave 1. Een verzameling lijnen in het vlak noemen we *mooi* indien elke lijn in de verzameling een oneven aantal van de andere lijnen in de verzameling snijdt.
Bepaal het kleinste gehele getal $k \geq 0$ met de volgende eigenschap: voor iedere 2018 verschillende lijnen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{2018}$ in het vlak bestaan er lijnen $\ell_{2018+1}, \ell_{2018+2}, \ldots, \ell_{2018+k}$ zodat de lijnen $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{2018+k}$ allemaal verschillend zijn en een mooie verzameling vormen.

Opgave 2. Vind alle functies $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor

$$f(x^2) - f(y^2) \leq \big(f(x) + y\big)\big(x - f(y)\big)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen zodat $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ een tweemacht is.

Opgave 4. In een niet-gelijkbenige driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. De bissectrice van $\angle BAC$ snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nogmaals in D. De lijn door I loodrecht op AD snijdt BC in F. Het midden van boog BC waar A op ligt, noemen we M. De lijn MI snijdt de cirkel door B, I en C nogmaals in N. Bewijs dat FN raakt aan de cirkel door B, I en C.