Selectietoets

vrijdag 9 maart 2018

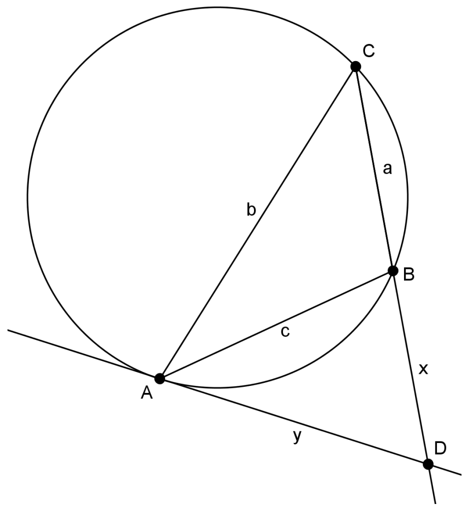
Uitwerkingen

Opgave 1. We hebben 1000 ballen in 40 verschillende kleuren, waarbij er van elke kleur precies 25 ballen zijn. Bepaal de kleinste waarde van n met de volgende eigenschap: als je de 1000 ballen willekeurig in een cirkel legt, zijn er altijd n ballen naast elkaar te vinden waarbij minstens 20 verschillende kleuren voorkomen.

Oplossing I. Bekijk de cirkel van ballen waarbij de 25 ballen van één kleur steeds allemaal naast elkaar liggen. Om nu 20 verschillende kleuren te hebben, moet je minstens 18 van deze groepen nemen plus nog een bal aan de ene kant daarvan en een bal aan de andere kant. Totaal heb je dus minimaal $18 \cdot 25 + 2 = 452$ ballen naast elkaar nodig. Dus $n \geq 452$. Nu bewijzen we dat je in elke cirkel van ballen genoeg hebt aan 452 ballen naast elkaar om 20 verschillende kleuren te krijgen. Bekijk daarvoor een willekeurige cirkel van ballen en alle mogelijke series van ballen naast elkaar die samen precies 20 kleuren hebben. (Er bestaat minstens één zo'n serie: pak een willekeurige bal en voeg de ballen ernaast één voor één toe, totdat je precies 20 kleuren hebt.) Neem een serie daarvan met zo min mogelijk ballen erin. Zeg dat de eerste bal daarvan wit is. Als er nog een bal in de serie wit is, dan hadden we de eerste bal kunnen weglaten om een serie te krijgen met evenveel kleuren, maar minder ballen. Dat is een tegenspraak met de minimaliteit van de serie. Dus er is geen enkele andere bal wit. In het bijzonder is ook de laatste bal van de serie niet wit; zeg dat deze zwart is. We zien op dezelfde manier dat geen enkele andere bal in de serie zwart is. Dus er is één witte bal, één zwarte bal en daarnaast nog ballen in 18 andere kleuren, hooguit 25 per kleur. Samen zijn dat hooguit $18 \cdot 25 + 2 = 452$ ballen. Dus inderdaad kun je altijd een serie van 452 ballen naast elkaar vinden met daarin minstens 20 verschillende kleuren. We concluderen dat de gevraagde minimale n gelijk is aan 452. $\square$

Oplossing II. We geven een alternatief bewijs voor het tweede deel van de oplossing. We doen dit uit het ongerijmde. Stel dat we een cirkel van ballen hebben waar elke serie van 452 ballen hooguit 19 kleuren bevat. Omdat $452 = 18 \cdot 25 + 2$ bevat elk zo'n serie dan precies 19 kleuren en zitten er van elke kleur minstens twee ballen in. Bekijk nu zo'n serie en schuif hem steeds één bal op. Bij zo'n verschuiving verdwijnt één bal uit de serie, zeg bal A, en komt er ook eentje bij, zeg bal B. De kleur van bal A komt minstens nog een keer voor in de serie, dus de kleur van bal A verdwijnt niet. Maar er mag ook geen extra kleur bijkomen, dus bal B moet van een kleur zijn die al in de serie zat. Elke keer dat we één opschuiven, blijft de verzameling van kleuren die voorkomen in de serie, dus dezelfde verzameling van 19 kleuren. Als we zo de hele cirkel rondgaan, komen we dus maar 19 verschillende kleuren tegen, terwijl er 40 verschillende kleuren zijn. Tegenspraak. Dus er is een serie van 452 ballen met minstens 20 verschillende kleuren. $\square$

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek waarvan de zijdelengtes positieve gehele getallen zijn die paarsgewijs relatief priem zijn. De raaklijn in A aan de omgeschreven cirkel snijdt de lijn BC in D. Bewijs dat $|BD|$ geen geheel getal is.

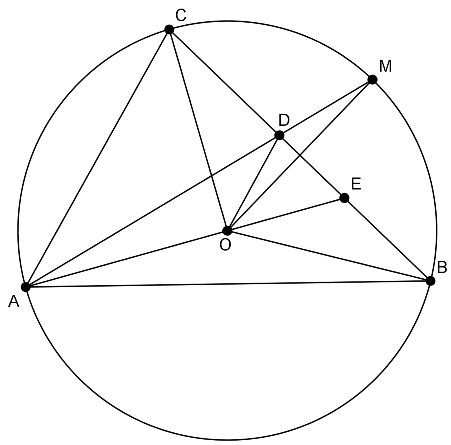


Oplossing. Er zijn twee configuraties mogelijk. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat B tussen D en C ligt. Schrijf $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $x = |BD|$ en $y = |AD|$. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling geldt $\angle BAD = \angle ACB = \angle ACD$, dus $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ (hh), dus $\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|CA|} = \frac{|AD|}{|CD|}$, oftewel $\frac{x}{y} = \frac{c}{b} = \frac{y}{a+x}$. We vinden hieruit $yc = bx$ en $ac + xc = by$, dus ook $byc = b^2x$ en $ac^2 + xc^2 = byc$. Dit combineren geeft $b^2x = ac^2 + xc^2$, oftewel $x(b^2 - c^2) = ac^2$.
Stel nu uit het ongerijmde dat x geheel is. Dan is $b^2 - c^2$ een deler van ac^2. Maar we weten $\text{ggd}(b, c) = 1$, dus ook $\text{ggd}(b^2 - c^2, c) = \text{ggd}(b^2, c) = 1$. Dus $b^2 - c^2$ moet een deler zijn van a. Daaruit volgt $b^2 - c^2 \leq a$. Merk op dat $b^2 - c^2 > 0$ aangezien $x(b^2 - c^2) = ac^2$; er geldt dus ook $b - c > 0$. Dus $b^2 - c^2 = (b - c)(b + c) \geq 1 \cdot (b + c)$ omdat b en c positieve gehele getallen zijn. Dus $a \geq b + c$, wat in tegenspraak is met de driehoeksongelijkheid. Dus $x = |BD|$ kan niet geheel zijn. $\square$

Opgave 3. Zij p een priemgetal. Bewijs dat het mogelijk is om een permutatie $a_1, a_2, \ldots, a_p$ van $1, 2, \ldots, p$ te kiezen zodat de getallen a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, $\ldots$, $a_1a_2a_3\cdots a_p$ allemaal verschillende resten geven na deling door p.

Oplossing. Noem $b_i = a_1a_2\cdots a_i$, voor $1 \leq i \leq p$. We bewijzen dat het mogelijk is de permutatie zo te kiezen dat $b_i \equiv i \mod p$ voor alle i. Voor $i \geq 2$ is $a_i \equiv b_i \cdot b_{i-1}^{-1} \mod p$ als $b_{i-1} \not\equiv 0 \mod p$. We kiezen nu dus $a_1 = 1$ en $a_i \equiv i \cdot (i-1)^{-1} \mod p$ voor $2 \leq i \leq p$. Het is nu voldoende te bewijzen dat $a_i \not\equiv 1 \mod p$ voor alle $2 \leq i \leq p$ en $a_i \not\equiv a_j \mod p$ voor alle $2 \leq j < i \leq p$.
Stel uit het ongerijmde dat $a_i \equiv 1 \mod p$ voor zekere $2 \leq i \leq p$. Dan is $i \cdot (i-1)^{-1} \equiv 1 \mod p$, dus $i \equiv i - 1 \mod p$, dus $0 \equiv -1 \mod p$. Omdat $p \geq 2$ is dit een tegenspraak.
Stel nu dat $a_i \equiv a_j \mod p$ voor zekere $2 \leq j < i \leq p$. Dan geldt $i \cdot (i-1)^{-1} \equiv j \cdot (j-1)^{-1} \mod p$, dus $i(j-1) \equiv j(i-1) \mod p$, dus $ij - i \equiv ij - j \mod p$, dus $-i \equiv -j \mod p$. Maar we hadden $2 \leq j < i \leq p$, dus dit kan niet.
We concluderen dat als we de a_i kiezen zoals hierboven aangegeven, alle a_i verschillend worden, zodat het inderdaad een permutatie van 1, 2, $\ldots$, p is. Verder geldt nu per definitie dat $a_1a_2\cdots a_i \equiv i \mod p$, zodat ook aan de tweede eis is voldaan. $\square$

Opgave 4. In een niet-gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ geldt $\angle BAC = 60°$. Zij D het snijpunt van de bissectrice van $\angle BAC$ met de zijde BC, O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ en E het snijpunt van AO met BC. Bewijs dat $\angle AED + \angle ADO = 90°$.



Oplossing. Zij M het tweede snijpunt van AD met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Dan is M het midden van de boog BC waar A niet op ligt. Er geldt nu $\angle COM = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CAB = 60°$. Verder is natuurlijk $|OC| = |OM|$, dus $\triangle OCM$ is gelijkbenig met een tophoek van $60°$. Dat betekent dat hij gelijkzijdig is, dus $|CM| = |CO|$. Omdat OM loodrecht op BC staat, volgt hieruit dat M de spiegeling is van O in zijde BC, en dus $\angle DOM = \angle DMO$.
Verder geldt $\angle DMO = \angle AMO = \angle MAO$ vanwege $|OA| = |OM|$. We vinden nu $\angle ODE = 90° - \angle DOM = 90° - \angle DMO = 90° - \angle MAO = 90° - \angle DAE$. Dus $\angle ODE + \angle DAE = 90°$. In driehoek ADE geldt $180° = \angle DAE + \angle AED + \angle ODE + \angle ADO$, dus we concluderen dat $\angle AED + \angle ADO = 90°$. $\square$

Opgave 5. Gegeven is een positief geheel getal n. Bepaal alle positieve reële getallen x met

$$nx^2 + \frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \ldots + \frac{(n+1)^2}{x+n} = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

Oplossing. Voor $1 \leq i \leq n$ geldt

$$\frac{(i+1)^2}{x+i} = i+1+\frac{(i+1)^2-(i+1)(x+i)}{x+i} = i+1+\frac{i+1-(i+1)x}{x+i} = i+1+\frac{(i+1)(1-x)}{x+i},$$

dus kunnen we de linkerkant van de gegeven vergelijking herschrijven tot

$$nx^2 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) + \frac{2(1-x)}{x+1} + \frac{3(1-x)}{x+2} + \ldots + \frac{(n+1)(1-x)}{x+n}.$$

Er geldt $2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+3)$ dus deze som valt weg tegen $\frac{n(n+3)}{2}$ aan de rechterkant van de gegeven vergelijking. Verder kunnen we nx^2 naar de andere kant halen en in alle breuken $1-x$ buiten haakjes halen. De vergelijking laat zich dus herschrijven tot

$$(1-x)\cdot\left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \ldots + \frac{n+1}{x+n}\right) = nx - nx^2.$$

De rechterkant kunnen we ontbinden als $nx(1-x)$. We zien nu dat $x = 1$ een oplossing is van deze vergelijking. Als er nog een oplossing $x \neq 1$ zou zijn, dan moet die voldoen aan

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \ldots + \frac{n+1}{x+n} = nx.$$

Voor $0 < x < 1$ geldt echter

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \ldots + \frac{n+1}{x+n} > \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} = n > nx,$$

terwijl voor $x > 1$ juist geldt

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \ldots + \frac{n+1}{x+n} < \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} = n < nx.$$

Er zijn dus geen oplossingen met $x \neq 1$. We concluderen dat voor alle n de enige oplossing $x = 1$ is. $\square$