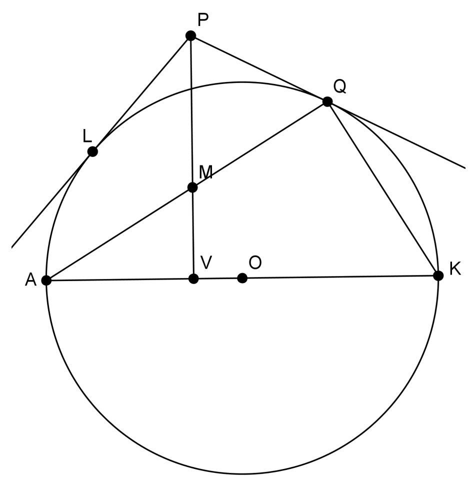
IMO-selectietoets III

zaterdag 3 juni 2017

Uitwerkingen

Opgave 1. Gegeven is cirkel ω met middellijn AK. Punt M ligt binnen de cirkel, niet op lijn AK. De lijn AM snijdt ω nogmaals in Q. De raaklijn aan ω in Q snijdt de lijn door M loodrecht op AK in P. Punt L ligt op ω zodat PL een raaklijn is, met $L \neq Q$. Bewijs dat K, L en M op een lijn liggen.



Oplossing I. Noem O het middelpunt van ω en zij V het snijpunt van MP met AK. We bewijzen nu eerst dat $\angle PVL = \angle POL$. Als V en O samenvallen, dan is er niets te bewijzen. Als V en O niet samenvallen, dan geldt $\angle OVP = 90° = \angle OLP$, dus $OVPL$ of $VOPL$ is een koordenvierhoek. (In feite ligt Q ook nog op de bijbehorende omgeschreven cirkel.) Hieruit volgt dat $\angle PVL = \angle POL$. We hebben nu in alle gevallen $\angle MVL = \angle PVL = \angle POL$. Omdat PL en PQ raken aan ω, geldt $\triangle OQP \cong \triangle OLP$, dus $\angle POL = \frac{1}{2}\angle QOL$. Vanwege de middelpuntsomtrekshoekstelling toegepast op ω is die hoek bovendien gelijk aan $\angle QAL$. Al met al vinden we

$$\angle MVL = \angle POL = \angle QAL = \angle MAL,$$

waaruit volgt dat $MVAL$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle ALM = 180° - \angle AVM = 90°$. Verder geldt wegens Thales dat $\angle ALK = 90°$, dus $\angle ALM = \angle ALK$, wat betekent dat L, M en K op een lijn liggen. □

Oplossing II. We definiëren V als in de eerste oplossing. Er geldt wegens Thales dat $\angle MQK = 90° = \angle MVK$, dus $MQKV$ is een koordenvierhoek. Dus $\angle PMQ = 180° -$

$\angle VMQ = \angle VKQ = \angle AKQ$. Omdat PQ raakt aan ω geldt $\angle AKQ = \angle AQP = \angle MQP$. Al met al geldt dus $\angle PMQ = \angle MQP$, wat betekent dat $\triangle MQP$ gelijkbenig is met $|PM| = |PQ|$. Vanwege gelijke raaklijnstukjes is ook $|PQ| = |PL|$, dus P is het middelpunt van de cirkel door M, Q en L. Daaruit volgt

$$\angle QLM = \tfrac{1}{2}\angle QPM = 90^\circ - \angle MQP = 90^\circ - \angle AKQ = \angle QAK = \angle QLK.$$

We concluderen dat L, M en K op een lijn liggen. $\square$

Opgave 2. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een rijtje reële getallen zodat $a_1 + \cdots + a_n = 0$ en definieer $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ voor $1 \leq i \leq n$. Veronderstel dat $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$ voor alle $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Bewijs dat

$$\max_{1 \leq \ell \leq n} |a_\ell| \geq \max_{1 \leq m \leq n} |b_m|.$$

Oplossing I. Er geldt $b_n = 0$. Stel dat er een $i \leq n-1$ is met $b_i > 0$ en $a_{i+1} \geq 0$. Dan volgt uit $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$ dat $a_{j+1} \geq a_{i+1} \geq 0$ voor alle $i \leq j \leq n-1$. Dus $b_n = b_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_n \geq b_i > 0$, tegenspraak. We concluderen dat uit $b_i > 0$ volgt dat $a_{i+1} < 0$. En analoog: als $b_i < 0$, dan geldt $a_{i+1} > 0$.
Zij nu k zo dat $|b_k| = \max_{1 \leq m \leq n} |b_m|$. We kunnen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $b_k > 0$ (anders vermenigvuldigen we alle a_i met -1). Als $k = 1$, dan geldt $b_k = a_1$, dus $|b_k| = |a_1| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} |a_\ell|$ en dan zijn we klaar. Stel nu $k > 1$. Als $b_{k-1} > 0$, dan geldt volgens bovenstaande dat $a_k < 0$. Anderzijds is $a_k = b_k - b_{k-1} \geq 0$ omdat b_k maximaal was, tegenspraak. Dus $b_{k-1} \leq 0$. Nu is $a_k = b_k - b_{k-1} = b_k + |b_{k-1}| \geq b_k$, dus $|b_k| \leq |a_k| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} |a_\ell|$, wat we moesten bewijzen. $\square$

Oplossing II. Net als in oplossing I vinden we dat uit $b_i > 0$ volgt dat $a_{i+1} < 0$ en uit $b_i < 0$ volgt $a_{i+1} > 0$. Zij nu $M = \max_{1 \leq \ell \leq n} |a_\ell|$. We bewijzen met inductie naar t dat $|b_t| \leq M$ voor $1 \leq t \leq n$. Voor $t = 1$ geldt $|b_1| = |a_1| \leq M$. Zij nu $r \geq 1$ en neem aan dat $|b_r| \leq M$. Nu bewijzen we dat $|b_{r+1}| \leq M$. We onderscheiden drie gevallen. Als $b_r = 0$, dan geldt $|b_{r+1}| = |b_r + a_{r+1}| = |a_{r+1}| \leq M$. Stel nu $b_r > 0$. Dan weten we $a_{r+1} < 0$, dan geldt $b_{r+1} = b_r + a_{r+1}$, dus $a_{r+1} < b_{r+1} < b_r$. Vanwege de inductiehypothese is $b_r \leq M$ en verder weten we $a_{r+1} \geq -M$, dus $-M < b_{r+1} < M$, wat betekent dat $|b_{r+1}| \leq M$. Stel ten slotte dat $b_r < 0$. Dan weten we $a_{r+1} > 0$, dus zien we op dezelfde manier als hierboven $-M \leq b_r < b_{r+1} < a_{r+1} \leq M$, dus $|b_{r+1}| \leq M$. Dit voltooit de inductie. We concluderen dat $|b_t| \leq M$ voor alle t en daaruit volgt direct het gevraagde. $\square$

Opgave 3. Bepaal het product van alle positieve gehele getallen n waarvoor $3(n!+1)$ deelbaar is door $2n-5$.

Oplossing. De getallen $n = 1$ tot en met $n = 4$ voldoen, want $2n-5$ is dan gelijk aan respectievelijk -3, -1, 1 en 3, dus altijd een deler dan $3(n!+1)$. Vanaf nu bekijken we alleen $n > 4$ en dan is $2n-5 > 3$.

We bewijzen eerst dat als n voldoet, dan $2n-5$ priem moet zijn. We onderscheiden twee gevallen. Stel eerst dat $2n-5$ niet priem is en een priemdeler $p > 3$ heeft. Omdat $p \neq 2n-5$ en omdat $2n-5$ oneven is, geldt $p \leq \frac{2n-5}{3} < n$. Dus $p \mid n!$, maar dan $p \nmid n!+1$ en dus ook $p \nmid 3(n!+1)$ aangezien $p \neq 3$. Dus $2n-5 \nmid 3(n!+1)$, wat betekent dat n niet voldoet. Stel nu dat $2n-5$ niet priem is, maar alleen priemdelers 3 heeft; dan is het dus een driemacht groter dan 3. Echter, voor $n > 4$ is $3 \nmid n!+1$, dus $3(n!+1)$ is deelbaar door precies één factor 3 en niet meer. We zien dat n ook in dit geval niet kan voldoen.

Voor een $n > 4$ die voldoet, weten we nu dat $2n-5$ een priemgetal groter dan 3 is. Schrijf $q = 2n-5$. Dan $q \mid n!+1$, oftewel $n! \equiv -1 \mod q$. Verder zegt de stelling van Wilson dat $(q-1)! \equiv -1 \mod q$. Dus

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (2n-6)! \\ &\equiv (2n-6)(2n-7)\cdots(n+1)\cdot n! \\ &\equiv (-1)\cdot(-2)\cdot\dots\cdot(-n+6)\cdot n! \\ &\equiv (-1)^{n-6}\cdot(n-6)!\cdot n! \\ &\equiv (-1)^n\cdot(n-6)!\cdot -1 \qquad\qquad \mod q. \end{aligned}$$

Dus $(n-6)! \equiv (-1)^n \mod q$. Omdat $n! \equiv -1 \mod q$, volgt daaruit $n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-5) \equiv (-1)^{n-1} \mod q$. We vermenigvuldigen dit met 2^6:

$$2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdot(2n-8)\cdot(2n-10) \equiv (-1)^{n-1}\cdot 64 \mod q.$$

Modulo $q = 2n-5$ staat links $5\cdot 3\cdot 1\cdot -1\cdot -3\cdot -5 = -225$.

Stel n is oneven. Dan hebben we dus $-225 \equiv 64 \mod q$, dus $q \mid -225-64 = -289 = -17^2$. Dus $q = 17$ en dan $n = \frac{17+5}{2} = 11$. Stel nu n is even. Dan hebben we $-225 \equiv -64 \mod q$, dus $q \mid -225+64 = -161 = -7\cdot 23$. Dus $q = 7$ of $q = 23$ en dat geeft respectievelijk $n = 6$ en $n = 14$.

We controleren deze drie mogelijkheden. Voor $n = 11$ en $2n-5 = 17$:

$$\begin{aligned} 11! &= 1\cdot(2\cdot 9)\cdot(3\cdot 6)\cdot(5\cdot 7)\cdot 4\cdot 8\cdot 10\cdot 11 \\ &\equiv 4\cdot 8\cdot 10\cdot 11 = 88\cdot 40 \equiv 3\cdot 6 \equiv 1 \mod 17, \end{aligned}$$

dus $n = 11$ voldoet niet. Voor $n = 14$ en $2n-5 = 23$:

$$\begin{aligned} 14! &= 1\cdot(2\cdot 12)\cdot(3\cdot 8)\cdot(4\cdot 6)\cdot(5\cdot 14)\cdot(7\cdot 10)\cdot 9\cdot 11\cdot 13 \\ &\equiv 9\cdot 11\cdot 13 = 117\cdot 11 \equiv 2\cdot 11 \equiv -1 \mod 23, \end{aligned}$$

dus $n = 14$ voldoet. Voor $n = 6$ en $2n - 5 = 7$ ten slotte volgt $6! \equiv -1 \mod 7$ uit de stelling van Wilson, dus $n = 6$ voldoet ook.
We concluderen dat de getallen n die voldoen, zijn: 1, 2, 3, 4, 6 en 14. Het product daarvan is 2016. $\square$

Opgave 4. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Bepaal de kleinste positieve gehele m zodat geldt: gegeven n punten in het vlak, geen drie op een lijn, zijn er m lijnen te vinden, zodat geen enkele lijn door één van de gegeven punten gaat en zodat voor elk tweetal gegeven punten $X \neq Y$ geldt dat er een lijn is waarvan X en Y aan weerszijden liggen.

Oplossing. We bewijzen dat de kleinste m gelijk is aan $\frac{n}{2}$ als n even is en $\frac{n+1}{2}$ als n oneven. Kies de n punten allemaal op dezelfde cirkel en noem ze $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in de volgorde waarin ze op de cirkel liggen. De n lijnstukken $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$ moeten allemaal gesneden worden door minstens één lijn. Elke lijn snijdt hoogstens twee van zulke lijnstukken, aangezien elke lijn de cirkel hoogstens twee keer snijdt. Dus het aantal lijnen is minstens $\frac{n}{2}$ en dus voor oneven n minstens $\frac{n+1}{2}$.

Nu bewijzen we dat dit voldoende is. Eerst laten we zien dat gegeven vier verschillende punten P_1, P_2 en Q_1, Q_2 er altijd een lijn bestaat zodat P_1 en P_2 aan weerszijden van de lijn liggen en Q_1 en Q_2 ook. Neem hiervoor de lijn door het midden van P_1P_2 en door het midden van Q_1Q_2. Stel dat deze lijn door P_1 heen gaat. Dan gaat hij ook door P_2 heen, maar niet door Q_1 of Q_2, omdat er nooit drie punten op een lijn liggen. Schuif hem dan een klein stukje op zodat hij net niet door het midden van Q_1Q_2 heen gaat, maar nog wel door het midden van P_1P_2, dan gaat hij niet meer door één van deze vier punten heen. Analoog als de lijn door één van de andere drie punten heen zou gaan. Als de nu gekozen lijn door één van de overige gegeven punten in het vlak gaat, schuif je hem (nog) een heel klein beetje op zodat dat niet meer zo is. Omdat er maar eindig veel punten zijn, lukt dit altijd. Deze lijn heeft nu P_1 en P_2 aan weerszijden en Q_1 en Q_2 ook.

Neem nu aan dat n even is; als n oneven is, voegen we een willekeurig punt (niet op een lijn met twee van de andere punten) toe. De lijnen die we dan construeren, werken ook als je het extra punt weer weglaat. We moeten dus nu $\frac{n}{2}$ lijnen construeren. Kies een willekeurige lijn in een richting zodat geen enkele lijn door twee van de gegeven punten evenwijdig aan deze lijn loopt (dat kan omdat er maar eindig veel punten zijn en dus ook maar eindig veel tweetallen, terwijl er oneindig veel richtingen te kiezen zijn). Schuif nu de gekozen lijn op. Hierbij komt hij één voor één de gegeven punten tegen. Er is dus een moment dat er geen punten op de lijn liggen en er aan weerszijden van de lijn precies $\frac{n}{2}$ punten liggen. Daar leggen we deze eerste lijn vast.

Het vlak wordt nu in twee gebieden verdeeld, laten we zeggen het linker- en rechtergebied. We gaan nu lijnen toevoegen zodat elke lijn een nieuw deelgebied creëert in zowel het linker- als het rechtergebied. (We tellen alleen deelgebieden waarin minstens één punt ligt.) Hiervoor nemen we steeds twee punten in het linkergebied die nog niet gescheiden worden door een lijn en twee punten in het rechtergebied die nog niet gescheiden worden door een lijn. We kiezen nu een lijn zodat de twee punten links aan weerszijden van deze lijn liggen en de twee punten rechts ook; we hebben eerder laten zien dat dit kan. Er is nu zowel links als rechts minstens één extra deelgebied ontstaan, want het deelgebied met de twee punten erin is in tweeën gesplitst. Mochten er op een gegeven moment aan één van beide kanten geen twee punten meer zijn waar nog geen lijn tussendoor loopt, dan gebruiken we alleen nog punten aan de andere kant. Uiteindelijk hebben we na het toevoegen van $\frac{n}{2} - 1$ lijnen zowel links als rechts minstens $\frac{n}{2}$ deelgebieden met elk minstens één punt erin; er moet dus wel precies één punt in elk deelgebied zitten. Elk punt ligt dus in zijn eigen deelgebied, waardoor aan de voorwaarde voldaan wordt. In totaal hebben we $\frac{n}{2}$ lijnen gebruikt. Dus met $\frac{n}{2}$ lijnen lukt het altijd om aan de voorwaarde te voldoen. $\square$