NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

IMO-selectietoets II

vrijdag 2 juni 2017

Opgave 1. Laat a, b en c positieve gehele getallen zijn, allemaal verschillend, en veronderstel dat $p = ab + bc + ca$ een priemgetal is.

a) Bewijs dat a^2, b^2 en c^2 verschillende resten geven bij deling door p.

b) Bewijs dat a^3, b^3 en c^3 verschillende resten geven bij deling door p.

Opgave 2. De ingeschreven cirkel van een niet-gelijkbenige driehoek $\triangle ABC$ heeft middelpunt I en raakt aan BC en CA in respectievelijk D en E. Zij H het hoogtepunt van $\triangle ABI$, zij K het snijpunt van AI en BH en zij L het snijpunt van BI en AH. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van $\triangle DKH$ en $\triangle ELH$ snijden op de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Opgave 3. Zij $k > 2$ een geheel getal. Een positief geheel getal ℓ noemen we *k-pabel* als we de getallen $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ kunnen opdelen in twee verzamelingen A en B zodat de som van de elementen van A precies ℓ keer zo groot is als de som van de elementen van B. Bewijs dat het kleinste k-pabele getal relatief priem is met k.

Opgave 4. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat

$$(y+1)f(x) + f\big(xf(y) + f(x+y)\big) = y$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.