IMO-selectietoets I

donderdag 1 juni 2017

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij n een positief geheel getal. Gegeven zijn cirkelvormige schijven met stralen $1, 2, \ldots, n$. Van elke grootte hebben we twee schijven: een doorzichtige en een ondoorzichtige. In elke schijf zit een gaatje, precies in het midden, waarmee we de schijven op een rechtopstaand staafje kunnen stapelen. We willen nu stapels maken die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- Van elke grootte ligt er precies één schijf op de stapel.
- Als we recht van boven kijken, kunnen we de buitenranden van alle n schijven op de stapel zien. (Dat wil zeggen, als er een ondoorzichtige schijf op de stapel ligt, dan mogen daaronder geen kleinere schijven liggen.)

Bepaal het aantal verschillende stapels dat we kunnen maken onder deze voorwaarden. (Twee stapels zijn verschillend als ze niet precies dezelfde verzameling schijven gebruiken, maar ook als ze wel precies dezelfde verzameling schijven gebruiken maar niet in dezelfde volgorde.)

Oplossing. Noem een stapel *geldig* als hij aan de voorwaarden voldoet. Zij a_n het aantal geldige stapels met n schijven (met straal $1, 2, \ldots, n$). We bewijzen met inductie dat $a_n = (n+1)!$. Voor $n = 1$ kunnen we twee stapels maken: met de doorzichtige schijf met straal 1 en met de ondoorzichtige schijf met straal 1, dus $a_1 = 2 = 2!$. Stel nu dat we voor zekere $n \geq 1$ bewezen hebben dat $a_n = (n+1)!$. Bekijk een geldige stapel met $n+1$ schijven. Als we de schijf met straal $n+1$ weghalen, zijn nog steeds alle schijven van bovenaf zichtbaar, dus we houden een geldige stapel met n schijven over. Elke geldige stapel met $n+1$ schijven is dus te maken door in een geldige stapel met n schijven de schijf met straal $n+1$ op een geschikte plek in te voegen. In principe zijn er $n+1$ posities waarop we de schijf met straal $n+1$ kunnen invoegen: boven de bovenste schijf, boven de tweede schijf, $\ldots$, boven de onderste schijf en ook nog onder de onderste schijf. De schijf met straal $n+1$ zelf is altijd zichtbaar, waar we hem ook invoegen. Als we de schijf met straal $n+1$ invoegen onder de onderste schijf, dan mag hij zowel doorzichtig als ondoorzichtig zijn; in beide gevallen wordt het zicht op de andere schijven niet geblokkeerd. Er zijn dus $2a_n$ geldige stapels waarbij de schijf met straal $n+1$ onderop liggen. Als we echter op een andere positie een ondoorzichtige schijf met straal $n+1$ invoegen, dan blokkeert hij het zicht op de schijven eronder. We kunnen dus op de andere n posities alleen de doorzichtige schijf met straal $n+1$ invoegen. Er zijn dus na_n geldige stapels waarbij de schijf met straal

$n + 1$ niet onderop ligt. Zo vinden we

$$a_{n+1} = 2a_n + na_n = (n+2)a_n = (n+2)(n+1)! = (n+2)!.$$

Dit voltooit de inductie. $\square$

Opgave 2. Zij $n \geq 4$ een geheel getal. Bekijk een regelmatige $2n$-hoek waarbij aan elk hoekpunt een geheel getal is toegekend, wat we de *waarde* van dat hoekpunt noemen. Als vier verschillende hoekpunten van deze $2n$-hoek een rechthoek vormen, dan noemen we de som van de waarden van deze hoekpunten een *rechthoekssom.*
Bepaal voor welke gehele (niet-noodzakelijk positieve) m we de getallen $m+1$, $m+2$, $\ldots$, $m+2n$ als waarden kunnen toekennen aan de hoekpunten (in een of andere volgorde) zodat elke rechthoekssom een priemgetal is. *(Priemgetallen zijn per definitie positief.)*

Oplossing. Nummer de hoekpunten van de $2n$-hoek met de klok mee 1 tot en met $2n$ en zij a_i de waarde van hoekpunt i. Omdat het aantal hoekpunten van de veelhoek even is, kunnen we elk hoekpunt koppelen aan het punt er precies tegenover. We tellen de waarden van elk tweetal tegenoverliggende hoekpunten bij elkaar op en verkrijgen zo de getallen $s_i = a_i + a_{i+n}$ met $1 \leq i \leq n$.
Als vier hoekpunten A, B, C en D in die volgorde een rechthoek vormen, dan is $\angle ABC = 90°$ en $\angle ADC = 90°$, dus B en D liggen volgens Thales op de cirkel met middellijn AC. Omdat alle hoekpunten van de veelhoek op zijn omgeschreven cirkel liggen, is AC blijkbaar een middellijn van de omgeschreven cirkel. Dus A en C zijn tegenoverliggende hoekpunten en hetzelfde geldt voor B en D. Andersom geldt dat als A en C tegenoverliggende hoekpunten zijn en B en D ook, dat dan $ABCD$ een rechthoek is, ook wegens Thales. Kortom, vier punten vormen een rechthoek dan en slechts dan als ze tot twee paren tegenoverliggende hoekpunten behoren.
Er moet dus gelden dat $s_i + s_j$ priem is voor alle $1 \leq i < j \leq n$. Stel dat minstens drie van de getallen s_i dezelfde pariteit hebben, zeg s_j, s_k en s_l. Dan is de som van elke twee van die drie even, maar tegelijkertijd priem, dus die som moet in alle gevallen gelijk aan 2 zijn. Dus $s_j + s_k = s_k + s_l = s_j + s_l$, waaruit volgt dat $s_j = s_k = s_l$. Maar omdat $s_j + s_k = 2$, geeft dit $s_j = s_k = s_l = 1$. We concluderen dat hoogstens twee van de getallen s_i even zijn, en dat als er drie of meer oneven zijn, deze allemaal gelijk moeten zijn aan 1.
De totale som van alle s_i is gelijk aan de som van alle getallen bij de hoekpunten, dus gelijk aan

$$(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+2n) = 2mn + \tfrac{1}{2} \cdot 2n \cdot (2n+1) = 2mn + n(2n+1).$$

Modulo 2 is deze som congruent aan n. Anderzijds moet deze som modulo 2 congruent zijn aan het aantal oneven s_i. Dus het aantal oneven s_i heeft dezelfde pariteit als n. Omdat er totaal n getallen s_i zijn, is het aantal even s_i dus even. We hebben al gezien dat dat er hoogstens twee zijn, dus het zijn er nul of twee.
Stel dat $n = 4$ en stel dat er twee s_i even zijn en dus ook twee s_i oneven. Dan is de som van de twee even s_i gelijk aan 2 en de som van de twee oneven s_i ook gelijk aan 2, dus de totale som van de s_i is $4 = n$. Stel nu dat $n \geq 5$ en stel dat er twee s_i even zijn. Dan zijn er $n - 2 \geq 3$ van de s_i oneven, dus alle oneven s_i zijn gelijk aan 1. De twee even s_i samen zijn gelijk aan 2. Dus de totale som van de s_i is $(n-2) + 2 = n$. *(Je kunt ook bewijzen dat het geval met precies twee even s_i onmogelijk is.)* Stel nu dat er geen even s_i zijn. Dan

zijn alle s_i oneven en dus ook allemaal gelijk aan 1, dus is de totale som van de s_i gelijk aan n.
In alle gevallen is de totale som van de s_i dus n. We hebben ook gezien dat deze som gelijk is aan $2mn + n(2n + 1)$. Dus $2mn + n(2n + 1) = n$, waaruit na deling door $n \neq 0$ volgt $2m + 2n + 1 = 1$, dus $m = -n$.
We laten nu zien dat als $m = -n$, er inderdaad een oplossing bestaat. Neem $a_i = i$ en $a_{n+i} = 1 - i$ voor $1 \leq i \leq n$. Dan worden de getallen $1, 2, \ldots, n$ en de getallen $0, -1, \ldots, -n + 1$ gebruikt en dat zijn samen precies de getallen $m + 1, m + 2, \ldots, m + 2n$. Verder geldt $s_i = i + (1 - i) = 1$ voor alle i. Dus elke rechthoekssom is gelijk aan 2 en dat is een priemgetal.
We concluderen dat $m = -n$ de enige waarde van m is die voldoet. $\square$

Opgave 3. Bepaal alle mogelijke waarden van $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ als x en y reële getallen (ongelijk aan 0) zijn die voldoen aan $x^3+y^3+3x^2y^2=x^3y^3$.

Oplossing. We herschrijven het gegeven naar $x^3+y^3-x^3y^3=-3x^2y^2$, waarmee we vinden

$$\begin{aligned}(x+y)^3-x^3y^3&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-x^3y^3\\&=-3x^2y^2+3x^2y+3xy^2=3xy(-xy+x+y).\end{aligned}$$

Door te gebruiken dat $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ kunnen we anderzijds ook schrijven

$$\begin{aligned}(x+y)^3-x^3y^3&=(x+y-xy)\big((x+y)^2+xy(x+y)+(xy)^2\big)\\&=(x+y-xy)(x^2+y^2+2xy+x^2y+xy^2+x^2y^2).\end{aligned}$$

Als we nu de twee rechterkanten aan elkaar gelijk stellen, dan zien we dat ofwel $x+y-xy=0$ ofwel $x^2+y^2+2xy+x^2y+xy^2+x^2y^2=3xy$. Het laatste geval laat zich herschrijven tot

$$\begin{aligned}0&=x^2+y^2-xy+x^2y+xy^2+x^2y^2\\&=\tfrac{1}{2}(x-y)^2+\tfrac{1}{2}x^2(y^2+2y+1)+\tfrac{1}{2}y^2(x^2+2x+1)\\&=\tfrac{1}{2}(x-y)^2+\tfrac{1}{2}x^2(y+1)^2+\tfrac{1}{2}y^2(x+1)^2.\end{aligned}$$

De som van drie kwadraten moet dus 0 zijn, waaruit volgt dat elk van de kwadraten 0 moet zijn. Dus $x=y=-1$. In dit geval wordt inderdaad aan de gegeven vergelijking voldaan en geldt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-2$.
In het andere geval is $x+y-xy=0$, dus $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}-1=0$, waaruit volgt dat $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. Dit wordt bijvoorbeeld aangenomen voor $x=y=2$.
We concluderen dat de gevraagde waarden -2 en 1 zijn. $\square$

Alternatieve aanpak. Ook met minder algebraïsch gegoochel is het mogelijk de gewenste vorm van de gegeven relatie te vinden. We beschrijven hier een mogelijke aanpak.
Delen door x^3y^3 geeft

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{3}{xy}=1.$$

Hier zien we alvast iets met $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{y}$ in terug. We substitueren $a=\frac{1}{x}$ en $b=\frac{1}{y}$ om de notatie makkelijker te maken. Dan staat er

$$a^3+b^3+3ab=1$$

en zijn we op zoek naar de waarde van $a+b$. Waarschijnlijk zijn er wel oplossingen met $a=b$. We krijgen dan $2a^3+3a^2=1$. Getalletjes proberen of dit ontbinden geeft dat $a=-1$ en $a=\frac{1}{2}$ voldoen. Nu wordt $a+b$ gelijk aan -2 of 1. We kunnen nu gokken dat misschien wel alle paren (a,b) met $a+b=-2$ of alle paren (a,b) met $a+b=1$ werken;

dan zou de uitdrukking deelbaar zijn door $a+b+2$ respectievelijk $a+b-1$. Proberen laat zien dat het laatste inderdaad het geval is. We kunnen herschrijven tot

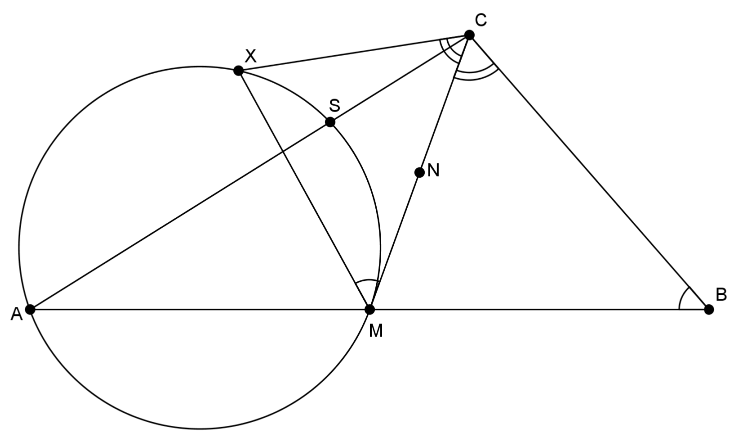
$$(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)=0.$$

We weten inmiddels ook dat $a+b=-2$ niet voor alle a en b een oplossing geeft, maar wel voor $a=b=-1$. Dus zouden we voor de rechterfactor iets met $a+1$ en $b+1$ willen. Het is nu makkelijk te zien dat de rechterfactor de som is van drie kwadraten. We kunnen het nu verder afmaken (vergelijkbaar met hierboven). $\square$

Opgave 4. In driehoek ABC is M het midden van AB en N het midden van CM. Zij X een punt dat voldoet aan $\angle XMC = \angle MBC$ en $\angle XCM = \angle MCB$, zo dat X en B aan verschillende kanten van CM liggen. Zij Ω de omgeschreven cirkel van driehoek AMX.

a) Bewijs dat CM raakt aan Ω.

b) Bewijs dat de lijnen NX en AC snijden op Ω.



Oplossing I. We bekijken de configuratie in de figuur; andere configuraties gaan analoog.

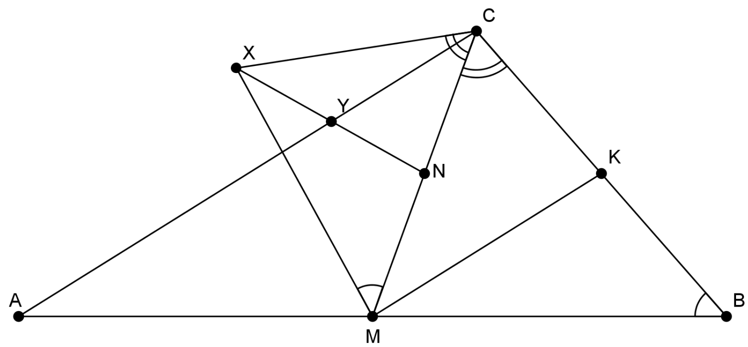
a) Uit de gegevens volgt dat $\triangle XMC \sim \triangle MBC$. Er geldt nu $\angle AMX = 180° - \angle XMC - \angle BMC = 180° - \angle XMC - \angle MXC = \angle MCX$ en

$$\frac{|AM|}{|MX|} = \frac{|BM|}{|MX|} = \frac{|MC|}{|CX|},$$

dus met zhz zien we dat $\triangle AMX \sim \triangle MCX$. Hieruit volgt dat $\angle XAM = \angle XMC$, dus met de omgekeerde raaklijnomtrekhoekstelling zien we dat CM raakt aan Ω.

b) Zij S het tweede snijpunt van AC en Ω (of het raakpunt van AC en Ω; dat is dan A). We moeten bewijzen dat S op NX ligt. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling geldt $\angle SMC = \angle SAM = \angle CAM$. (Als $S = A$, dan volgt $\angle SMC = \angle CAM$ uit het feit dat CA en CM beide raaklijnstukjes zijn en dus $\triangle CAM$ gelijkbenig is.) Hieruit volgt $\triangle CSM \sim \triangle CMA$ (hh), dus $\frac{|CM|}{|CA|} = \frac{|SM|}{|MA|}$. Aangezien $|CM| = 2|MN|$ en $|MA| = \frac{1}{2}|AB|$, geldt ook $\frac{|MN|}{|CA|} = \frac{|SM|}{|AB|}$. Samen met $\angle SMN = \angle SMC = \angle CAM = \angle CAB$ betekent dit $\triangle SNM \sim \triangle BCA$. Dus $\angle MSN = \angle ABC$. Verder is $\angle XSM = 180° - \angle XAM$. In het vorige onderdeel hebben we gezien dat $\angle XAM = \angle XMC = \angle MBC = \angle ABC$, dus $\angle XSM = 180° - \angle ABC = 180° - \angle MSN$. Hieruit volgt dat S op XN ligt.

$\square$



Oplossing II voor deel b Zij K het midden van BC. Uit de gelijkvormigheid $\triangle XMC \sim \triangle MBC$ volgt ook dat $\triangle XMN \sim \triangle MBK$. Omdat lijn XM en lijn BM een hoek van $\angle AMX$ maken, zijn de andere zijden NX en KM niet evenwijdig. Aangezien KM een middenparallel is in driehoek ABC, is KM evenwijdig aan AC. Dus hebben NX en AC een snijpunt Y. We zien nu dat $\angle BMK = \angle MXN = \angle MXY$. Vanwege de middenparallel geldt verder $\angle MAY = \angle MAC = \angle BMK$. Dus $\angle MXY = \angle MAY$, waaruit volgt dat Y op Ω ligt. $\square$