



# Selectietoets

vrijdag 18 maart 2016

**Opgave 1.** Voor een positief geheel getal  $n$  dat geen tweemacht is, definiëren we  $t(n)$  als de grootste oneven deler van  $n$  en  $r(n)$  als de kleinste positieve oneven deler van  $n$  die ongelijk aan 1 is. Bepaal alle positieve gehele getallen  $n$  die geen tweemacht zijn en waarvoor geldt

$$n = 3t(n) + 5r(n).$$

**Opgave 2.** Bepaal alle drietallen  $(x, y, z)$  van niet-negatieve reële getallen die voldoen aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x^2 - y &= (z - 1)^2, \\y^2 - z &= (x - 1)^2, \\z^2 - x &= (y - 1)^2.\end{aligned}$$

**Opgave 3.** Zij  $\triangle ABC$  een rechthoekige driehoek met  $\angle A = 90^\circ$  en omgeschreven cirkel  $\Gamma$ . De ingeschreven cirkel raakt aan  $BC$  in een punt  $D$ . Zij  $E$  het midden van de boog  $AB$  van  $\Gamma$  waar  $C$  niet op ligt en zij  $F$  het midden van de boog  $AC$  van  $\Gamma$  waar  $B$  niet op ligt.

- Bewijs dat  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .
- Bewijs dat  $EF$  door de raakpunten van de ingeschreven cirkel aan  $AB$  en  $AC$  gaat.

**Opgave 4.** De Facebookgroep Olympiadetraining heeft minstens vijf leden. Er is een zeker getal  $k$  met de eigenschap: voor elk  $k$ -tal leden geldt dat er minstens één lid van dat  $k$ -tal bevriend is met de andere  $k - 1$ . (Vriendschap is wederzijds: als  $A$  bevriend is met  $B$ , dan is  $B$  ook bevriend met  $A$ .)

- Stel  $k = 4$ . Kun je met zekerheid zeggen dat de Facebookgroep een lid heeft dat vrienden is met alle andere leden?
- Stel  $k = 5$ . Kun je met zekerheid zeggen dat de Facebookgroep een lid heeft dat vrienden is met alle andere leden?

**Opgave 5.** Bepaal alle paren  $(m, n)$  van positieve gehele getallen waarvoor

$$(m + n)^3 \mid 2n(3m^2 + n^2) + 8.$$