

Junior Wiskunde Olympiade

Opgaven deel 2



zaterdag 1 oktober 2016
Vrije Universiteit Amsterdam

- De opgaven in deel 2 zijn open vragen. Schrijf je antwoord op het antwoordformulier op de aangegeven plek. Een berekening of uitleg is niet nodig.
- Voor elk goed antwoord krijg je 3 punten. Voor foute antwoorden worden geen punten afgetrokken.
- Je mag gebruik maken van kladpapier. Verder is het gebruik van een passer en een liniaal of geodriehoek toegestaan. Rekenmachines en vergelijkbare hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
- Je hebt voor deze opgaven 45 minuten de tijd. **Veel succes!**

1. Alle kentekens in het land Wissewis bestaan uit drie getallen van twee cijfers. Een kenteken wordt mooi gevonden indien het aan de volgende twee eigenschappen voldoet:

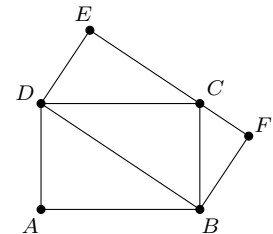
- het bestaat uit zes verschillende cijfers;
- het eerste getal is kleiner dan het tweede getal en het tweede getal is kleiner dan het derde getal.

Een voorbeeld van een mooi kenteken is 03-29-64.

Hoeveel mooie kentekens zijn er die als eerste getal 61 hebben?

2. Alice, Bob, Carla, Daan en Eva staan in die volgorde in een kring (Bob staat links van Alice). Elk hebben ze een aantal snoepjes, 100 in totaal. Ze geven allemaal tegelijkertijd een deel van hun snoepjes aan hun linkerbuur: Alice geeft $\frac{1}{3}$ van haar snoepjes, Bob $\frac{1}{4}$, Carla $\frac{1}{5}$, Daan $\frac{1}{6}$ en Eva $\frac{1}{7}$. Dan blijkt iedereen weer evenveel snoepjes te hebben als daarvoor. Hoeveel snoepjes heeft Eva?

3. In de figuur hiernaast zie je rechthoek $ABCD$ en rechthoek $BDEF$. De lengte van AB is gelijk aan 8 en de lengte van BC is 5. Wat is de oppervlakte van vijfhoek $ABFED$?



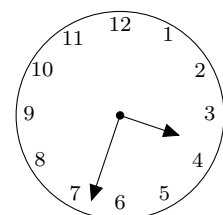
4. In deze opgave bekijken we alleen getallen van drie cijfers waarvan geen van de cijfers een nul is. Zo'n getal noemen we een *geluksgetal* als geldt:

- het getal is deelbaar door 4, en
- als je de drie cijfers van het getal in een andere volgorde zet, krijg je altijd weer een getal dat deelbaar is door 4.

Het getal 132 is dus geen geluksgetal, want 132 is wel deelbaar door 4, maar 231 niet.

Hoeveel geluksgetallen zijn er?

5. Hoe vaak op een dag (dat is 24 uur) staan de kleine en de grote wijzer van de klok loodrecht op elkaar?



6. Janneke, Karin, Lies, Marieke en Nadine hebben samen een hardlooptwedstrijd gedaan. Ze finishten allemaal op verschillende momenten, behalve twee van hen, die tegelijkertijd over de finish kwamen. Verder weten we:

- minstens drie hardlopers finishten eerder dan Janneke;
- nadat Karin finishte maar voordat Lies finishte, kwamen nog precies twee anderen over de finish;
- Marieke kwam niet als eerste over de finish;
- kort na Nadine kwam Janneke over de finish; niemand anders zat daar nog tussen.

Welke twee hardlopers kwamen tegelijkertijd over de finish?

7. Voor alle positieve gehele getallen a en b maken we een getal $a \heartsuit b$. Er gelden de volgende rekenregels:

- regel 1: $1 \heartsuit 1 = 1$;
- regel 2: $a \heartsuit b = b \heartsuit a$;
- regel 3: $a \heartsuit (b + c) = a + (a \heartsuit b) + (a \heartsuit c)$.

Uit deze rekenregels volgt bijvoorbeeld dat

$$2 \heartsuit 1 = 1 \heartsuit 2 = 1 \heartsuit (1 + 1) = 1 + 1 \heartsuit 1 + 1 \heartsuit 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Bereken $20 \heartsuit 16$.

8. We maken een rij getallen. Om een nieuw getal in de rij te maken, doen we steeds het volgende:

- als het vorige getal oneven is: vermenigvuldig dit getal met zichzelf en tel er vervolgens 3 bij op;
- als het vorige getal even is: deel dit getal door 2.

Met begingetal 5 krijgen we zo bijvoorbeeld als tweede getal in de rij $5 \times 5 + 3 = 28$ en als derde getal in de rij $\frac{28}{2} = 14$. We kunnen als begingetal elk van de getallen 1 tot en met 1000 kiezen. Bij hoeveel van deze getallen is het tiende getal in de rij een getal kleiner dan 10?