

Finale

Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 14 september 2018
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; er hoort ook een duidelijke redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Versie voor klas 4 en lager

Noem een positief geheel getal een *husselgetal* als geldt:

- (1) Alle cijfers zijn ongelijk aan 0.
- (2) Het getal is deelbaar door 11.
- (3) Het getal is deelbaar door 12. Als je de cijfers in een willekeurige andere volgorde zet, krijg je altijd weer een getal dat deelbaar is door 12.

Hoeveel husselgetallen van 5 cijfers zijn er?

1. Versie voor klas 5 & klas 6

Noem een positief geheel getal een *husselgetal* als geldt:

- (1) Alle cijfers zijn ongelijk aan 0.
- (2) Het getal is deelbaar door 11.
- (3) Het getal is deelbaar door 12. Als je de cijfers in een willekeurige andere volgorde zet, krijg je altijd weer een getal dat deelbaar is door 12.

Hoeveel husselgetallen van 10 cijfers zijn er?

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

De getallen 1 tot en met 25 worden elk blauw of rood gekleurd. Bepaal alle mogelijke kleuringen die voldoen aan de volgende regels:

- Het getal 5 is rood.
- Als de getallen x en y verschillende kleuren hebben en $x + y \leq 25$, dan is $x + y$ blauw.
- Als de getallen x en y verschillende kleuren hebben en $x \cdot y \leq 25$, dan is $x \cdot y$ rood.

2. Versie voor klas 6

De getallen 1 tot en met 15 worden elk blauw of rood gekleurd. Bepaal alle mogelijke kleuringen die voldoen aan de volgende regels:

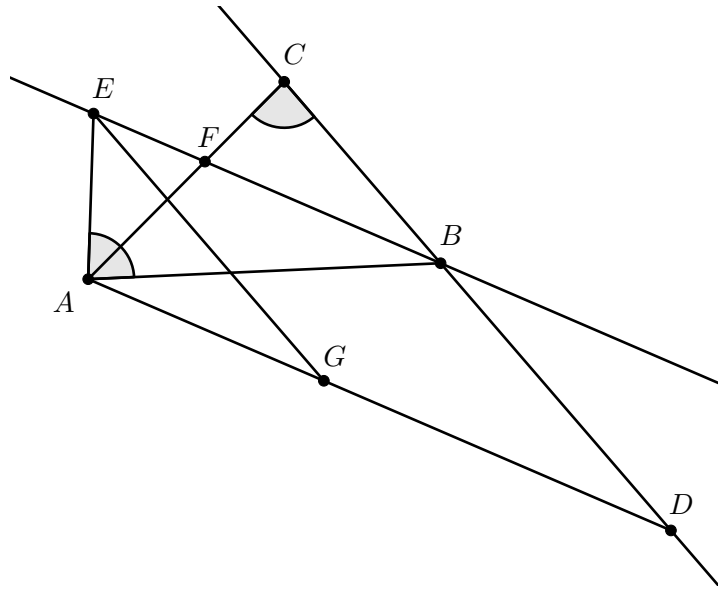
- Het getal 15 is rood.
- Als de getallen x en y verschillende kleuren hebben en $x + y \leq 15$, dan is $x + y$ blauw.
- Als de getallen x en y verschillende kleuren hebben en $x \cdot y \leq 15$, dan is $x \cdot y$ rood.

3. Bepaal alle drietallen (x, y, z) bestaande uit drie *verschillende* reële getallen die voldoen aan het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= -x + 3y + z, \\y^2 + z^2 &= x + 3y - z, \\x^2 + z^2 &= 2x + 2y - z.\end{aligned}$$

4. **Versie voor klas 4 en lager**

In driehoek ABC is $\angle A$ kleiner dan $\angle C$. Punt D ligt op het verlengde van BC (met B tussen C en D) zo dat $|BD| = |AB|$. Punt E ligt op de bissectrice van $\angle ABC$ zo dat $\angle BAE = \angle ACB$. Verder snijdt lijnstuk BE zijde AC in punt F . Punt G ligt op lijnstuk AD zo dat EG en BC evenwijdig zijn.



- (a) Bewijs dat driehoek AEF gelijkbenig is.
 (b) Bewijs dat $|AG| = |BF|$.

4. **Versie voor klas 5 & klas 6**

In driehoek ABC is $\angle A$ kleiner dan $\angle C$. Punt D ligt op het verlengde van BC (met B tussen C en D) zo dat $|BD| = |AB|$. Punt E ligt op de bissectrice van $\angle ABC$ zo dat $\angle BAE = \angle ACB$. Verder snijdt lijnstuk BE zijde AC in punt F . Punt G ligt op lijnstuk AD zo dat EG en BC evenwijdig zijn.

Bewijs dat $|AG| = |BF|$.

5. In een quiz zijn er drie deuren. Achter één van de deuren ligt een prijs. Je mag de quizmaster vragen of de prijs achter de linkerdeur ligt. Je mag hem ook vragen of de prijs achter de rechterdeur ligt. Elk van deze twee vragen mag je meerdere keren stellen in een volgorde die je zelf kunt kiezen. Elke keer antwoordt de quizmaster met 'ja' of 'nee'. In de hele serie van vragen mag hij maximaal 10 keer liegen. Je moet van tevoren zeggen hoeveel vragen je gaat stellen (maar welke vragen dat zijn, mag je laten afhangen van de antwoorden van de quizmaster). Wat is het kleinste aantal dat je kunt noemen om nog wel zeker te weten dat je na de serie vragen weet waar de prijs ligt?