Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 16 september 2016

Uitwerkingen

1. (a) Er worden twee keer 500 getallen omcirkeld en er staan 999 getallen op de stoep. Vanwege het ladenprincipe is er dus minstens een getal dat zowel rood als blauw omcirkeld is. Neem zo'n dubbel omcirkeld getal en stel dat dit het getal k is. De rood omcirkelde getallen vormen van links naar rechts precies de rij $1, 2, \dots, 500$, dus links van het dubbel omcirkelde getal staan de rood omcirkelde 1 tot en met $k-1$ en rechts ervan staan de rood omcirkelde $k+1$ tot en met 500. De blauw omcirkelde getallen staan van links naar rechts juist in dalende volgorde. Links van het dubbel omcirkelde getal staan dus de blauw omcirkelde $k+1$ tot en met 500 en rechts ervan staan de blauw omcirkelde 1 tot en met $k-1$.

We tellen nu het aantal getallen aan weerszijden van het dubbel omcirkelde getal. Links van het dubbel omcirkelde getal staan in ieder geval: rood omcirkelde 1 tot en met $k-1$ en blauw omcirkelde $k+1$ tot en met 500. Dat zijn samen 499 verschillende getallen. Rechts van het dubbel omcirkelde getal staan in ieder geval: rood omcirkelde $k+1$ tot en met 500 en blauw omcirkelde 1 tot en met $k-1$. Ook dat zijn samen 499 verschillende getallen. Omdat er in totaal $999 = 499 + 1 + 499$ getallen op de stoep staan, hebben we blijkbaar alle getallen al geteld. We concluderen dat er zowel links als rechts van het dubbel omcirkelde getal precies 499 getallen staan, zodat het dubbel omcirkelde getal inderdaad precies in het midden van de rij staat.

(b) Net als in deel (a) zien we, vanwege het ladenprincipe, dat er een getal is dat zowel rood als groen omcirkeld is. Als meerdere getallen dubbel omcirkeld zijn, dan staat een daarvan niet precies in het midden en zijn we klaar. We hoeven dus alleen nog het geval te onderzoeken dat er precies één dubbel omcirkeld getal is. Laat dit getal gelijk zijn aan k.

We tellen weer het aantal getallen aan weerszijden van het dubbel omcirkelde getal. Links hiervan staan in ieder geval de rood omcirkelde $1, 2, \dots k-1$ en de groen omcirkelde $1, \dots, k-1$. Samen zijn dit $2 \cdot (k-1)$ getallen, want geen van deze getallen is dubbel omcirkeld. Rechts van het dubbel omcirkelde getal staan in ieder geval de rood omcirkelde $k+1, \dots, 500$ en de groen omcirkelde $k+1, \dots, 500$. Samen zijn dit $2 \cdot (500-k)$ getallen, want geen van deze getallen is dubbel omcirkeld. Omdat $2 \cdot (k-1) + 1 + 2 \cdot (500-k) = 999$ hebben we blijkbaar alle getallen al geteld.

Links van het dubbel omcirkelde getal staan dus precies $2 \cdot (k-1)$ getallen en rechts ervan precies $2 \cdot (500-k)$. Aangezien $2 \cdot (k-1)$ een *even* getal is, is het ongelijk aan 499. We concluderen dat het dubbel omcirkelde getal niet precies in het midden staat.

2. Stel dat we een rijtje hebben met x keer een 1, y keer een -1 en dus $2n - x - y$ keer een 0. We berekenen de somproductwaarde van deze rij (uitgedrukt in x en y).

In de somproductwaarde komen zes verschillende soorten termen voor: $1 \cdot 1$, $1 \cdot -1$, $-1 \cdot -1$, $1 \cdot 0$, $-1 \cdot 0$ en $0 \cdot 0$. Alleen de eerste drie soorten termen leveren een bijdrage aan de som, de laatste drie zijn namelijk gelijk aan 0.

Het aantal termen $1 \cdot 1 = 1$ is het aantal manieren om uit de x enen er twee te kiezen. Dat aantal is gelijk aan $\frac{x(x-1)}{2}$: er zijn x mogelijkheden voor de eerste 1 en daarna $x-1$ mogelijkheden voor de tweede 1. Omdat het niet uitmaakt welke van de twee enen we als eerste kiezen tellen we elk tweetal zo dubbel.

Op dezelfde manier vinden we dat het aantal termen $-1 \cdot -1 = 1$ gelijk is aan $\frac{y(y-1)}{2}$.

Het aantal termen $1 \cdot -1 = -1$ is gelijk aan xy, want er zijn x mogelijkheden om de 1 te kiezen en, onafhankelijk daarvan, y mogelijkheden voor de -1.

In totaal vinden we als somproductwaarde dus

$$S = \frac{x(x-1)}{2} \cdot 1 + \frac{y(y-1)}{2} \cdot 1 + xy \cdot -1 = \frac{x^2 - 2xy + y^2 - x - y}{2} = \frac{(x-y)^2 - (x+y)}{2}.$$

Omdat $(x-y)^2 \geqslant 0$ (een kwadraat is niet-negatief) en $-(x+y) \geqslant -2n$ (het rijtje heeft maar $2n$ getallen) geldt dus zeker dat $S \geqslant \frac{0-2n}{2} = -n$. De somproductwaarde kan dus niet kleiner zijn dan $-n$. Als we nu $x = y = n$ kiezen, dan is $(x-y)^2 = 0$ en $-x-y = -2n$, zodat we een somproductwaarde van precies $\frac{0-2n}{2} = -n$ krijgen. De kleinst mogelijke somproductwaarde is dus $-n$.

3. Merk op dat de opgave symmetrisch is in a, b en c. Dat wil zeggen: als we overal a en b verwisselen, of a en c, of b en c, dan krijgen we dezelfde voorwaarden. We bekijken daarom eerst de oplossingen met $a \leqslant b \leqslant c$. De andere oplossingen vinden we daarna door de waarden van a, b en c onderling te verwisselen.

Omdat a en b positief zijn, volgt dat $a + b + c > c$. Omdat c het grootste getal van de drie is, geldt ook dat $a + b + c \leqslant 3c$. Het gegeven dat $a + b + c$ een veelvoud van c moet zijn leidt nu tot twee mogelijkheden: $a + b + c = 2c$ of $a + b + c = 3c$. We bekijken de twee gevallen apart.

Als $a + b + c = 3c$, dan moeten a, b en c allemaal gelijk zijn, omdat c het grootste getal van de drie is en $3c$ anders groter is dan $a + b + c$. De grootste gemene deler $\text{ggd}(b, c)$ is dus gelijk aan $\text{ggd}(c, c) = c$ en die moet 1 zijn vanwege de voorwaarden. We vinden dus dat $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ en we zien dat dit inderdaad een oplossing geeft want $\text{ggd}(1, 1) = 1$ en 1 is een deler van $1 + 1 + 1$.

Als $a + b + c = 2c$, dan hebben we dus dat $c = a + b$. We weten dat b een deler moet zijn van $a + b + c = 2a + 2b$. Omdat $a > 0$, geldt er dat $2a + 2b > 2b$. Omdat $b \geqslant a$, geldt er dat $2a + 2b \leqslant 4b$. Omdat $2a + 2b$ een veelvoud van b moet zijn, hebben we dus nog maar twee mogelijkheden: $2a + 2b = 3b$ en $2a + 2b = 4b$. We bekijken de twee gevallen weer apart.

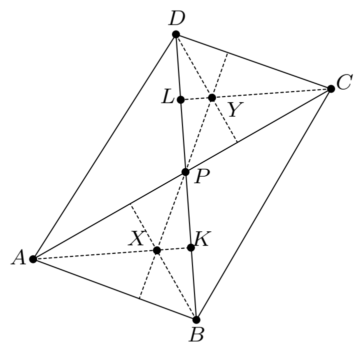
Als $2a + 2b = 3b$, dan vinden we $b = 2a$. Net als in het eerste geval vinden we nu dat $a = \text{ggd}(a, 2a) = \text{ggd}(a, b) = 1$. We vinden dus $b = 2$ en $c = a + b = 3$. Het gevonden drietal $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ is inderdaad een oplossing, want $\text{ggd}(1, 2) = \text{ggd}(1, 3) = \text{ggd}(2, 3) = 1$ en $1 + 2 + 3 = 6$ is deelbaar door 1, 2 en 3.

Als $2a + 2b = 4b$, dan vinden we $a = b$. Ook nu zien we dat $a = \text{ggd}(a, a) = \text{ggd}(a, b) = 1$. Uit $b = a = 1$ volgt nu $c = a + b = 2$ en dus $(a, b, c) = (1, 1, 2)$. Dit is inderdaad een oplossing want $\text{ggd}(1, 1) = \text{ggd}(1, 2) = 1$ en $1 + 1 + 2 = 4$ is deelbaar door 1 en door 2.

De oplossingen met $a \leqslant b \leqslant c$ zijn dus: $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ en $(a, b, c) = (1, 2, 3)$. Dit geeft in totaal tien oplossingen (a, b, c), namelijk

$$(1,1,1), \quad (1,1,2),\ (1,2,1),\ (2,1,1), \quad (1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1).$$

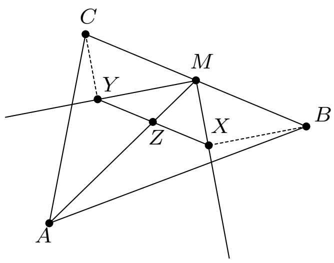
4. **[Versie klas 5 & klas 4 en lager]** Het snijpunt van AX en BD noemen we K en het snijpunt van CY en BD noemen we L. Bekijk nu driehoeken PLY en PKX. De hoeken $\angle PLY$ en $\angle PKX$ zijn allebei recht en de hoeken $\angle YPL$ en $\angle XPK$ zijn overstaande hoeken en dus gelijk. Omdat $|PX| = |PY|$ zien we dat driehoeken PKX en PLY congruent zijn (ZHH). We zien dus dat $|PK| = |PL|$.



Bekijk nu driehoeken PAK en PCL. Nu hebben we weer dat $\angle AKP$ en $\angle CLP$ recht zijn en dat $\angle KPA$ en $\angle LPC$ overstaand en dus gelijk zijn. Bovendien hadden we al dat $|PK| = |PL|$. Driehoeken PAK en PCL zijn dus congruent (HZH). Hieruit leiden we af dat $|AP| = |PC|$.

Op een analoge manier kunnen we afleiden dat $|BP| = |DP|$. De twee diagonalen van vierhoek $ABCD$ snijden elkaar middendoor en vierhoek $ABCD$ is dus een parallellogram.

4. **[Versie klas 6]** Als eerste merken we op dat geldt: $\angle CMY = \frac{1}{2}\angle CMA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AMB) = 90^\circ - \angle XMB$. Omdat $\angle MXB = 90^\circ$ en de hoeken in driehoek BMX optellen tot 180°, vinden we dus dat $\angle CMY = 90^\circ - \angle XMB = \angle MBX$.



In driehoeken CMY en MBX zien we dat $\angle CMY = \angle MBX$, $\angle MYC = 90^\circ = \angle BXM$ en $|CM| = |MB|$. De twee driehoeken zijn dus congruent (ZHH). In het bijzonder zien we dus dat $|MX| = |CY|$ en $|MY| = |BX|$.

Bekijk nu ook driehoek XYM. We weten al dat $|MY| = |BX|$ en dat $\angle YMX = \angle YMA + \angle AMX = \frac{1}{2}\angle CMA + \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Ten slotte hebben driehoeken XYM en MBX zijde MX gemeen en zijn dus congruent (ZHZ).

In het bijzonder zien we dat $\angle MXY = \angle XMB$ en omdat MX de bissectrice van $\angle AMB$ was, hebben we $\angle XMB = \angle AMX$. We zien nu dat driehoek MXZ twee gelijke hoeken heeft en dus gelijkbenig is, met tophoek Z. We leiden hieruit af dat $|MZ| = |XZ|$.

Op analoge manier zien we dat driehoeken XYM en CMY congruent zijn en vinden we $\angle XYM = \angle CMY = \angle YMA$. Driehoek MYZ is dus gelijkbenig met tophoek Z. We vinden nu dat $|YZ| = |MZ|$. Samen met $|MZ| = |XZ|$ geeft dit het gevraagde.

5. Stel dat niet alle getallen blauw gekleurd zijn. Dan is er een getal, zeg k, dat niet blauw is. We gaan nu een tegenspraak afleiden.

Zonder verlies van algemeenheid mogen we wel aannemen dat k rood is. Omdat alle *oneven* getallen blauw zijn, moet k *even* zijn, zeg $k = 2m$ met $m \geqslant 1$. Uit de tweede eis volgt dat ook $8m$ rood is. Uit de derde eis volgt nu dat minstens een van de getallen $8m + 2$ en $8m + 4$ rood is. Echter, $2m + 1$ is oneven en dus blauw, zodat volgens de tweede eis ook $8m + 4 = 4 \cdot (2m + 1)$ blauw is. Dus $8m + 2$ moet rood zijn.

Vanwege de derde eis moet $8m - 2$ dezelfde kleur hebben als $8m$ of $8m + 2$. Aangezien $8m$ en $8m + 2$ allebei rood zijn, moet ook $8m - 2$ dus rood zijn. Omdat $8m$ en $8m - 2$ rood zijn, moet wegens de derde eis ook $8m - 4$ rood zijn. De tweede eis geeft nu dat ook $(8m - 4)/4 = 2m - 1$ rood is. Maar dit is onmogelijk omdat $2m - 1$ oneven is, en dus blauw.

We zien dat er een tegenspraak ontstaat als we aannemen dat er een getal is dat niet blauw gekleurd is. Het moet dus wel zo zijn dat alle getallen blauw gekleurd zijn.