Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 maart 2019

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

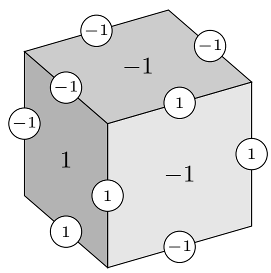
B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi+1$ of 3^{100}.

B1. Na het ontbijt gaan de zussen Anna en Birgit naar school, ieder naar een andere school. Hun huis bevindt zich aan een fietspad dat tussen beide scholen loopt. Anna fietst met een constante snelheid van 12 km per uur en Birgit loopt in tegenovergestelde richting met een constante snelheid van 4 km per uur. Zij vertrekken tegelijkertijd. Kort daarna ziet moeder dat de meisjes hun lunch zijn vergeten en besluit hen achterna te gaan. Precies 10 minuten nadat Anna en Birgit zijn vertrokken, vertrekt moeder op haar elektrische fiets. Ze haalt eerst Anna in (en overhandigt Anna haar lunch) en keert dan direct om richting Birgit. Als ze Birgit heeft ingehaald geeft ze Birgit haar lunch en keert direct weer om naar huis. Moeder rijdt steeds met een constante snelheid van 24 km per uur.
Hoeveel minuten na het vertrek van Anna en Birgit is moeder weer thuis?

B2. In een hoge hoed zitten honderd lootjes die genummerd zijn van 1 tot en met 100. Je wilt drie lootjes hebben met de eigenschap dat elk van de drie nummers kleiner is dan de twee andere nummers bij elkaar opgeteld. Zo zouden de drie lootjes met nummers 10, 15 en 20 bijvoorbeeld geschikt zijn (want $10 < 15+20$, $15 < 10+20$ en $20 < 10+15$), maar de lootjes met nummers 3, 4 en 7 niet (want 7 is niet kleiner dan $3+4$). Je mag (zonder naar de nummers te kijken) een aantal lootjes uit de hoed pakken.
Hoeveel lootjes moet je minstens pakken om er zeker van te zijn dat daar drie lootjes bij zitten die aan je wens voldoen?

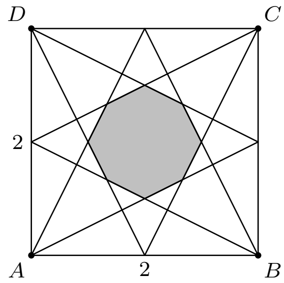
B3. Bij elk van de twaalf ribben van een kubus schrijven we het getal 1 of -1. Voor elk zijvlak van de kubus vermenigvuldigen we daarna de vier getallen op de ribben van dat zijvlak en schrijven de uitkomst op dat zijvlak. Ten slotte tellen we de achttien opgeschreven getallen bij elkaar op.
Wat is de kleinste (meest negatieve) uitkomst die we zo kunnen krijgen?
In de figuur zie je een voorbeeld van zo'n kubus. De getallen aan de achterkant van de kubus kun je hier niet zien.



GA VERDER OP DE ACHTERKANT

B4. Probeer je het getal 19 te delen door 5, dan komt dat niet precies uit. Het getal 5 past 3 keer in 19 en je houdt 4 over als rest. Er zijn twee positieve gehele getallen n met de eigenschap: als je n^2 deelt door $2n+1$, blijft er rest 1000 over.
Welke twee getallen zijn dit?

B5. In een vierkant $ABCD$ met zijdelengte 2 trekken we vanuit elk hoekpunt een lijn naar het midden van elk van de twee overstaande zijden. Zo verbinden we bijvoorbeeld A met het midden van BC en met het midden van CD. De acht lijnen die we zo krijgen begrenzen samen een achthoek binnen het vierkant (zie de figuur).
Wat is de oppervlakte van deze achthoek?



C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Met een gedeeltelijke oplossing kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook je kladpapier in.
LET OP: Maak elke C-opgave op een apart vel papier en lever ook het bijbehorende kladpapier per opgave in.

C1. We bekijken getallenrijen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestaande uit n gehele getallen. Voor gegeven $k \leqslant n$ kunnen we de getallen uit de rij als volgt in k groepjes opdelen: a_1 gaat in het eerste groepje, a_2 in het tweede groepje en zo door tot a_k dat in het k-de groepje gaat. Vervolgens gaat a_{k+1} weer in het eerste groepje, gaat a_{k+2} in het tweede groepje, enzovoorts. We noemen de rij *k-delig* als deze opdeling de eigenschap heeft dat voor elk groepje de getallen bij elkaar opgeteld dezelfde uitkomst geven.

De rij $1, 2, 3, 4, -2, 6, 13, 12, 17, 8$ is bijvoorbeeld 4-delig, want

$$1 + (-2) + 17 \;=\; 2 + 6 + 8 \;=\; 3 + 13 \;=\; 4 + 12.$$

Deze rij is echter niet 3-delig, want de uitkomsten van $1 + 4 + 13 + 8$, $2 + (-2) + 12$ en $3 + 6 + 17$ zijn niet alle drie hetzelfde.

(a) Geef een rijtje van 6 *verschillende* getallen dat zowel 2-delig als 3-delig is.

(b) Geef een rijtje van 7 *verschillende* getallen dat tegelijk 2-delig, 3-delig en 4-delig is.

(c) Vind het grootste getal $k \leqslant 99$ waarvoor er een k-delig rijtje van 99 *verschillende* getallen bestaat. (Geef dus een voorbeeld van zo'n rijtje en bewijs dat zo'n rijtje voor grotere k niet bestaat.)

C2. Een jaartal heet *interessant* als het uit vier verschillende cijfers bestaat. Zo is 2019 interessant. Het is zelfs zo dat 2013 tot en met 2019 allemaal interessant zijn: maar liefst zeven interessante jaartallen achter elkaar.

(a) Bepaal de eerstvolgende rij van zeven achtereenvolgende interessante jaartallen en bewijs dat het inderdaad de eerstvolgende rij is.

(b) Bewijs dat er in de jaren 1000 tot en met 9999 nergens een rij van acht achtereenvolgende interessante jaartallen voorkomt.