Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 16 maart 2018

Uitwerkingen

B-opgaven

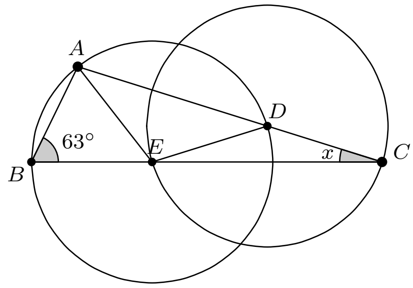
1. A, D, B, C Noem de scores van Anouk, Bart, Celine en Daan respectievelijk a, b, c en d. De opgave vertelt ons nu dat

$$b + d = a + c, \qquad a + b > c + d \quad \text{en} \quad d > b + c.$$

Door a op te tellen aan beide kanten van de linker vergelijking, krijgen we $a+b+d = 2a+c$. Door d op te tellen aan beide kanten van de ongelijkheid in het midden krijgen we $a + b + d > c + 2d$. Als we dit combineren, zien we dat $2a + c > c + 2d$. Hieruit volgt dat $a > d$.

We weten dus dat $a > d > b + c$ en dus heeft Anouk de hoogste score en Daan de op een na hoogste score. Uit de vergelijking $b + d = a + c$ en $a > d$ volgt nu ook dat $b + d > c + d$ en dus $b > c$. Dus de volgorde van de deelnemers is: Anouk, Daan, Bart, Celine.

2. 18 graden Noem de hoek die we zoeken, hoek C, even x. Omdat D het middelpunt is van een cirkel door C en E, liggen C en E even ver van D af. Oftewel, driehoek CDE is gelijkbenig met tophoek D. We zien dus dat $\angle DEC = x$ en $\angle CDE = 180° - 2x$, omdat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.



We zien nu dat $\angle ADE = 2x$, omdat die hoek samen met $\angle CDE$ gestrekt is. Driehoek AED is ook gelijkbenig, met tophoek E. Dus $\angle DAE = 2x$. Verder is ook driehoek ABE gelijkbenig, met tophoek E. We zien dus dat $\angle EAB = \angle ABE = 63°$.

De som van de hoeken in driehoek ABC is 180 graden. We zien dus dat $63° + (63° + 2x) + x = 180°$. Hieruit volgt dat $3x = 180° - 126° = 54°$. De gevraagde hoek is dus $\frac{1}{3} \cdot 54° = 18°$.

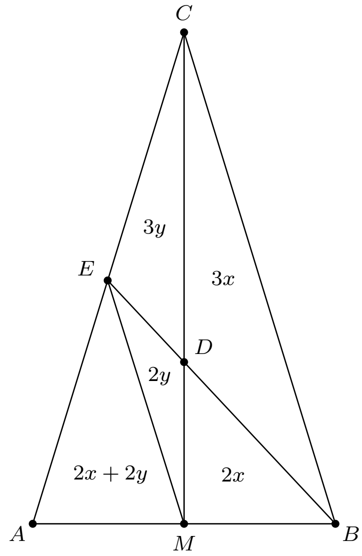
3. 2442 Stel dat n een palindroomgetal is en dat $n - 2018$ dat ook is. Het eerste en tevens laatste cijfer van n noemen we a. Merk op dat het laatste cijfer van $n - 2018$ gelijk is aan $a - 8$ als $a \geqslant 8$ en gelijk is aan $a - 8 + 10 = a + 2$ als $a < 8$.

We bekijken eerst het geval dat n vijf of meer cijfers lang is. Als $a \geqslant 2$ dan is het eerste cijfer van $n - 2018$ gelijk aan a of $a - 1$. Het laatste cijfer is echter gelijk aan $a - 8$ of $a + 2$, dus $n - 2018$ is geen palindroomgetal. Bekijk nu het geval dat $a = 1$. Als n precies vijf cijfers heeft, dan ligt $n - 2018$ tussen $10000 - 2018 = 7982$ en $19999 - 2018 = 17981$. Het eerste cijfer van $n - 2018$ is dan 7, 8, 9 of 1. Als n zes of meer cijfers heeft, dan is het eerste cijfer van $n - 2018$ gelijk aan 1 of aan 9 (als bijvoorbeeld $100000 \leqslant n \leqslant 102017$). In beide gevallen is het laatste cijfer van $n - 2018$ echter $a + 2 = 3$, dus $n - 2018$ is geen palindroomgetal.

Nu resteert het geval dat n vier cijfers lang is. Omdat n groter dan 2018 moet zijn, geldt $a \geqslant 2$. Als $a \geqslant 4$ dan is het eerste cijfer van $n - 2018$ gelijk aan $a - 2$ of $a - 3$. Het laatste cijfer is echter gelijk aan $a - 8$ of $a + 2$, dus $n - 2018$ is geen palindroomgetal. Als $a = 3$ dan is het eerste cijfer van $n - 2018$ een 1 of een 9. Het laatste cijfer is echter een 5, dus $n - 2018$ is geen palindroomgetal.

Het enige geval dat overblijft is $n = 2bb2$ met $b \geqslant 1$. We zien dat $2112 - 2018 = 94$ geen palindroomgetal is. In het geval dat $b \geqslant 2$, is het laatste cijfer van $n - 2018$ een 4 en het eerste cijfer een b. De enige mogelijkheid is daarom $n = 2442$. Het verschil $2442 - 2018 = 424$ is inderdaad een palindroomgetal.

4. $\frac{3}{4}$ De oppervlakte van een driehoek is de helft van de basis vermenigvuldigd met de hoogte. Als je voor driehoeken BDM en BCD de zijdes DM en CD als basis neemt, dan hebben de driehoeken dezelfde hoogte. De oppervlaktes verhouden zich dus als $2 : 3$. Stel dat de oppervlakte van driehoek BDM gelijk is aan $2x$, dan is de oppervlakte van driehoek BCD gelijk aan $3x$.



Op dezelfde manier verhouden de oppervlaktes van driehoek DEM en CDE zich als $2 : 3$. De oppervlakte van DEM noemen we $2y$, dan is de oppervlakte van CDE gelijk aan $3y$. Ook hebben driehoeken BEM en AEM gelijke oppervlaktes, omdat M het midden is van AB. Dus de oppervlakte van driehoek AEM is $2x + 2y$.

Ten slotte merken we op dat driehoeken ACM en BCM gelijke oppervlaktes hebben, namelijk de helft van driehoek ABC. Dus $(2x + 2y) + 2y + 3y = 2x + 3x$, oftewel $7y = 3x$.

De totale oppervlakte van ABC is $10x$. Driehoek BCE heeft oppervlakte $3x+3y = \frac{30}{7}x$. De oppervlakte van driehoek ABE is dan $10x - \frac{30}{7}x = \frac{40}{7}x$. De verhouding $\frac{|CE|}{|EA|}$ is dus $\frac{3}{4}$.

5. 110 We bekijken zaagtandgetallen met alleen de cijfers 1, 2 en 3. We maken onderscheid tussen zogenaamde *stijgende* zaagtandgetallen en *dalende* zaagtandgetallen. Zaagtandgetallen zijn stijgend als het tweede cijfer groter is dan het eerste, en dalend als het tweede cijfer juist kleiner is. Er zijn zes zaagtandgetallen van lengte 2, namelijk 12, 13, 23, 21, 31 en 32, waarvan de eerste drie stijgend zijn en de laatse drie dalend.

Als we nu een stijgend zaagtandgetal van lengte 3 willen maken, dan kan dat op twee manieren. We kunnen ofwel beginnen met het cijfer 1 en daar een dalend zaagtandgetal van lengte 2 achter zetten. Of we beginnen met het cijfer 2 en plaatsen er een dalend zaagtandgetal achter dat begint met het cijfer 3.

Op dezelfde manier kunnen we de stijgende zaagtandgetallen van lengte 4 maken door óf te beginnen met met het cijfer 1 en er een dalend zaagtandgetal van lengte 3 achter te zetten, óf te beginnen met cijfer 2 en er een dalend zaagtandgetal van lengte 3 achter te zetten dat begint met een 3. Het maken van stijgende zaagtandgetallen van lengte 5, 6, 7 en 8 gaat net zo.

Voor de dalende zaagtandgetallen hebben we een soortgelijke methode om ze te maken uit stijgende zaagtandgetallen die één korter zijn. Hier beginnen we met het cijfer 3 en zetten er een stijgend zaagtandgetal achter, of beginnen we met het cijfer 2 en zetten we er een stijgend zaagtandgetal achter dat begint met een 1.

We maken nu een tabel met de aantallen zaagtandgetallen van lengte $2, 3, \ldots, 8$. Vanwege bovenstaande constructie van zaagtandgetallen uit kortere zaagtandgetallen kan de tabel eenvoudig van links naar rechts worden ingevuld.

lengte	2	3	4	5	6	7	8
stijgend, begincijfer 1	2	3	5	8	13	21	34
stijgend, begincijfer 2	1	2	3	5	8	13	21
dalend, begincijfer 2	1	2	3	5	8	13	21
dalend, begincijfer 3	2	3	5	8	13	21	34

In totaal zijn er dus $34 + 21 + 21 + 34 = 110$ zaagtandgetallen van lengte 8.

C-opgaven

C1. Een verdeling van balletjes die aan alle drie de regels voldoet noemen we een *correcte* verdeling. Van de twee dozen noemen we degene met de meeste balletjes de *volste* doos. Het is duidelijk dat er minstens $1 + 2 = 3$ balletjes nodig zijn om een verdeling te maken die aan de eerste twee regels voldoet.

We bekijken eerst het geval dat n **oneven** is.
Als $n = 3$ dan moet de volste doos twee balletjes hebben. Deze doos heeft dan een waarde van minstens $1 + 2 = 3$ terwijl de andere doos met één balletje een waarde van hoogstens 3 heeft. Er is dan niet aan de derde regel voldaan en er bestaat dus geen correcte verdeling.

Als $n = 5$ dan is er wel een correcte verdeling: doe balletjes 1, 2 en 3 in de ene doos en balletjes 4 en 5 in de andere doos. Omdat $4 + 5$ minstens 2 meer is dan $1 + 2 + 3$ is dit inderdaad een correcte verdeling.

Als er een correcte verdeling is met n balletjes, dan is er ook een correcte verdeling met $n + 2$ balletjes. We kunnen namelijk balletje $n + 1$ aan de volste doos toevoegen en balletje $n + 2$ aan de andere doos. De waarde van de volste doos stijgt dan minder dan die van de andere doos, zodat aan regel 3 voldaan blijft.

Aangezien we een correcte verdeling voor $n = 5$ hebben, vinden we dus ook een correcte verdeling voor $n = 7$. Met dezelfde opmerking vinden we dan een correcte verdeling voor $n = 9$, $n = 11$, etc.

We bekijken nu het geval dat n **even** is.
Als $n = 4$, dan moet de volste doos minstens drie balletjes hebben en daarmee een waarde van minstens $1 + 2 + 3 = 6$. De andere doos heeft hoogstens één balletje en dus een waarde van hoogstens 4. Er is dan niet aan de derde regel voldaan. Er bestaat dus geen correcte verdeling.

Als $n = 6$, dan moet de volste doos minstens vier balletjes hebben en dus een waarde van minstens $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. De andere doos heeft hoogstens twee balletjes en dus een waarde van hoogstens $5 + 6 = 11$. Omdat $11 < 2 + 10$ is niet aan regel 3 voldaan. Er is dus geen correcte verdeling.

Als $n = 8$, dan is er wel een correcte verdeling: stop balletjes 1 tot en met 5 in de ene doos en balletjes 6 tot en met 8 in de andere doos. De volste doos heeft dan een waarde van $1+2+3+4+5 = 15$ en de andere doos heeft een waarde van $6+7+8 = 21$. Omdat $21 \geqslant 2+15$ is dit een correcte verdeling.

Opnieuw geldt dat een correcte verdeling met n balletjes ook een correcte verdeling met $n + 2$ balletjes geeft door balletje $n + 1$ aan de volste doos toevoegen en balletje $n + 2$ aan de andere doos. Aangezien we een correcte verdeling voor $n = 8$ hebben, vinden we dus ook een correcte verdeling voor $n = 10, 12, 14, \ldots$.

We concluderen dat er voor $n = 1, 2, 3, 4, 6$ geen correcte verdeling is, maar voor alle andere positieve gehele n is er wel een correcte verdeling.

C2. (a) Ja, zo'n getal a bestaat, bijvoorbeeld $a = 33$. Dan geldt: $16 + a = 7^2$, $3 + a = 6^2$ en $16 \cdot 3 + a = 9^2$.
Een geschikte a is eenvoudig te vinden door te proberen $48 + a = 49, 64, 81$.

(b) Nee, zo'n getal a betaat niet. De getallen $20 + a$ en $18 + a$ kunnen niet allebei een kwadraat zijn omdat het verschil van twee kwadraten niet gelijk kan zijn aan 2. Stel immers dat $m^2 - n^2 = 2$, dan moet gelden dat $(m + n)(m - n) = 2$ met $m > n$. Omdat 1 en 2 de enige positieve delers zijn van 2 moet dan gelden dat $m + n = 2$ en $m - n = 1$. Maar daaruit volgt dat $2m = (m + n) + (m - n) = 3$ en dat kan niet omdat $2m$ even is en 3 oneven.

(c) Gegeven een oneven geheel getal n zullen we laten zien dat er gehele getallen a, x, y en z bestaan zo dat

$$\begin{aligned} 2018 + a &= x^2, && (1) \\ n + a &= y^2, && (2) \\ 2018n + a &= z^2. && (3) \end{aligned}$$

Als we vergelijking (2) van vergelijking (1) aftrekken, dan vinden we

$$2018 - n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

We kiezen daarom x en y zo dat $x + y = 2018 - n$ en $x - y = 1$. Optellen van deze twee vergelijkingen geeft $2x = 2019 - n$ en van elkaar aftrekken geeft $2y = 2017 - n$. We kiezen daarom

$$x = \frac{2019 - n}{2} \qquad \text{en} \qquad y = \frac{2017 - n}{2}.$$

Omdat n oneven is, zijn dit gehele getallen. Er geldt nu inderdaad dat $x - y = 1$ en $x + y = 2018 - n$ en daarom dat

$$2018 - n = x^2 - y^2. \tag{4}$$

We nemen nu $a = y^2 - n$. Dan is zeker aan vergelijking (2) voldaan. Ook aan vergelijking (1) is voldaan want $2018 + a = 2018 + y^2 - n = x^2$ (de tweede gelijkheid volgt uit (4)).
Ten slotte laten we zien dat $2018n + a$ een kwadraat is. We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned} 2018n + a &= 2018n + y^2 - n \\ &= 2017n + \frac{(2017 - n)^2}{4} \\ &= \frac{4 \cdot 2017n + 2017^2 - 2 \cdot 2017n + n^2}{4} \\ &= \frac{2017^2 + 2 \cdot 2017n + n^2}{4} \\ &= \frac{(2017 + n)^2}{4} = \left(\frac{2017 + n}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Aangezien n oneven is, is $\frac{2017+n}{2}$ een geheel getal. Kiezen we $z = \frac{2017+n}{2}$ dan hebben we gehele getallen a, x, y en z gevonden die voldoen aan (1), (2) en (3).