

Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 16 maart 2018

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

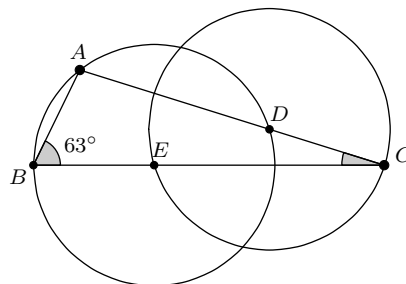
B-opgaven

Bij de B-vragen hoef je alleen het antwoord te geven (bijvoorbeeld een getal). Een uitleg is niet nodig. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.

LET OP: geef je antwoorden in exacte en vereenvoudigde vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi + 1$ of 3^{100} .

- B1.** Anouk, Bart, Celine en Daan hebben meegedaan aan een wiskundewedstrijd. Elk van hun scores is een positief geheel getal. Bart en Daan hebben samen precies even veel punten gescoord als Anouk en Celine samen. Anouk en Bart hebben samen meer punten gescoord dan Celine en Daan samen. Daan heeft in zijn eentje meer punten gescoord dan Bart en Celine samen. Schrijf de namen van de vier leerlingen op in volgorde van hoge naar lage score.

- B2.** In de figuur zie je een driehoek ABC . Hoek B is gelijk aan 63° . Op zijde AC ligt een punt D en op zijde BC ligt een punt E . Er geldt dat B , A en D op een cirkel met middelpunt E liggen. Ook geldt dat punten E en C op een cirkel met middelpunt D liggen.



Hoe groot is hoek C ?

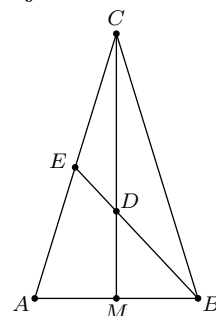
(Let op: de figuur hiernaast is niet op schaal.)

- B3.** Een *palindroomgetal* is een positief geheel getal (van één of meer cijfers) dat hetzelfde blijft wanneer je de volgorde van de cijfers omdraait. Zo zijn 1245421 en 333 bijvoorbeeld palindroomgetallen, maar 345 en 100 niet. Er is precies één palindroomgetal n waarvoor geldt dat als je er 2018 vanaf haalt, de uitkomst ook een palindroomgetal is.

Wat is dit getal n ?

- B4.** Driehoek ABC is gelijkbenig met top C . Het midden van AB noemen we M . Op lijnstuk CM ligt een punt D met $\frac{|CD|}{|DM|} = \frac{3}{2}$. Lijn BD snijdt lijnstuk AC in punt E .

Bereken $\frac{|CE|}{|EA|}$. (Let op: de figuur hiernaast is niet op schaal.)



- B5.** Een *zaagtandgetal* is een positief geheel getal met de volgende eigenschap: van elk drietal cijfers naast elkaar is het middelste cijfer ófwel groter dan zijn twee buurcijfers ófwel kleiner dan zijn twee buurcijfers. De getallen 352723 en 314 zijn bijvoorbeeld zaagtandgetallen, maar 3422 en 1243 niet.

Hoeveel zaagtandgetallen van acht cijfers lang zijn er waarvan elk cijfer een 1, een 2 of een 3 is?

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; er hoort ook een redenering bij die laat zien dat jouw antwoord klopt. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op.

Met gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. Je hebt n balletjes met op elk balletje een getal. Samen bevatten de balletjes precies de getallen 1 tot en met n . Je moet de balletjes verdelen over twee dozen. De *waarde* van de doos krijg je door alle getallen van de balletjes in die doos bij elkaar op te tellen. De verdeling moet aan de volgende regels voldoen:

- In elke doos komt minstens één balletje.
- De twee dozen mogen niet evenveel balletjes bevatten.
- De waarde van de doos met de minste balletjes moet minimaal 2 groter zijn dan de waarde van de doos met de meeste balletjes.

Bepaal voor welke positieve gehele getallen n dit mogelijk is.

(Bewijs dat het voor die getallen n inderdaad mogelijk is en dat het voor andere getallen n niet mogelijk is.)

C2. In deze opgave bekijken we kwadraten: getallen van de vorm m^2 waarbij m een geheel getal is.

- Bestaat er een geheel getal a zodat $16 + a$, $3 + a$ en $16 \cdot 3 + a$ allemaal kwadraten zijn?
Zo ja, geef dan zo'n getal a en laat zien dat het daarvoor werkt.
Zo nee, bewijs dan dat zo'n getal a niet bestaat.
- Bestaat er een geheel getal a zodat $20 + a$, $18 + a$ en $20 \cdot 18 + a$ allemaal kwadraten zijn?
Zo ja, geef dan zo'n getal a en laat zien dat het daarvoor werkt.
Zo nee, bewijs dan dat zo'n getal a niet bestaat.
- Bewijs dat er voor elk oneven getal n een geheel getal a bestaat zodat $2018 + a$, $n + a$ en $2018 \cdot n + a$ allemaal kwadraten zijn.