Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 11 maart 2016

Uitwerkingen

B-opgaven

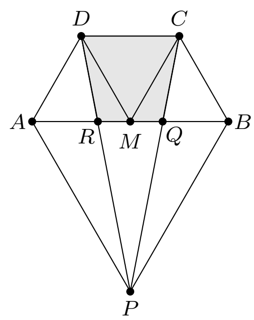
B1. 4 Van het getal noemen we het eerste cijfer a en het tweede cijfer b. De voorwaarde is dan dat $10 \cdot a + b = 4(a + b)$. Omschrijven geeft $6a = 3b$, oftewel $2a = b$. Omdat $0 \leqslant b \leqslant 9$ zijn de enige mogelijkheden $a = 0, 1, 2, 3, 4$. De mogelijkheid $a = 0$ valt af omdat we getallen tussen 10 en 99 zoeken. We vinden daarom de volgende vier oplossingen: 12, 24, 36 en 48.

B2. 68 Van de 100 kaarten zijn er 33 met een nummer dat deelbaar is door 3 en 50 met een nummer dat deelbaar is door 2. Anders gezegd: er zijn precies $100 - 33 = 67$ kaarten met een nummer dat *niet* deelbaar is door 3 en $100 - 50 = 50$ kaarten met een nummer dat *niet* deelbaar is door 2. Als Lisa 68 kaarten trekt, dan moet minstens één van de getrokken kaarten dus een nummer hebben dat deelbaar is door 3, want $68 > 67$. Omdat $68 > 50$ moet ook minstens één van de getrokken kaarten een nummer hebben dat deelbaar is door 2. Daarmee zal het product van de nummers van de 68 getrokken kaarten deelbaar zijn door 6.

Als Lisa daarentegen 67 of minder kaarten trekt, dan kan het zijn dat al die kaarten een nummer hebben dat niet deelbaar is door 3. Maar dan is het product van die nummers ook niet deelbaar door 3, en dus niet door 6.

We concluderen dat Lisa ten minste 68 kaarten uit de doos moet trekken om zeker te weten dat het product van de bijbehorende nummers deelbaar is door 6.

B3. 5 Laat M het midden zijn van AB. Omdat $|AM| = |CD|$ en AM en CD evenwijdig zijn, is vierhoek $AMCD$ een parallellogram. Er volgt dat $|CM| = |AD|$, dus driehoek BCM is gelijkzijdig. De oppervlakte van driehoek BMC is dus een kwart van de oppervlakte van driehoek ABP en dus gelijk aan 3.



Driehoek MQC en driehoek BQP zijn gelijkvormig (hh), want hoek CMQ en hoek PBQ zijn allebei 60 graden en hoeken MQC en BQP zijn overstaand en dus gelijk. Uit $|BP| = 2|CM|$ volgt nu dat $|BQ| = 2|MQ|$ zodat $|MQ| = \frac{1}{3}|MB|$. De oppervlakte van driehoek CMQ is dus $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van driehoek BMC en daarmee gelijk aan $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Met een soortgelijke redenering zien we dat ook de oppervlakte van driehoek DRM gelijk is aan 1. De oppervlakte van driehoek CDM is gelijk aan die van driehoek MBC (gelijke basis en hoogte) en dus gelijk aan 3.

De oppervlakte van vierhoek $QCDR$ is de som van de oppervlakten van driehoeken RMD, MQC en MCD, en dus gelijk aan $1 + 1 + 3 = 5$.

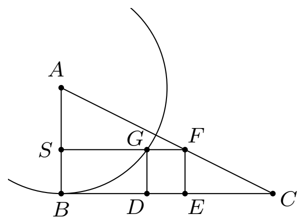
B4. 7 Het deelnemersveld bestond uit drie meisjes en een aantal jongens. Noem één van die jongens Julian. Julian speelt in elke wedstrijd tegen een meisje, maar niet tweemaal tegen hetzelfde meisje. Daarom kan Julian niet meer dan 3 wedstrijden spelen. Zodoende speelt hij in totaal tegen niet meer dan 3 andere jongens (één per wedstrijd). Omdat hij tegen elke andere jongen speelt, zijn er blijkbaar niet meer dan 3 andere jongens. Het totaal aantal deelnemers is daarom niet meer dan $1 + 3 + 3 = 7$.

Een situatie met 7 deelnemers is ook daadwerkelijk mogelijk. Noem de meisjes A, B en C en de jongens J, K, L en M. Laat hen nu zeven wedstrijden spelen in de volgende drietallen:

$$ABC, \quad AJK, \quad ALM, \quad BJL, \quad BKM, \quad CJM, \quad CKL.$$

Het is eenvoudig te controleren dat elk tweetal deelnemers in precies één drietal samenkomt.

B5. $\frac{2}{5}$ Noem de zijde van het vierkant x. Driehoek FEC is gelijkvormig met driehoek ABC. Hieruit volgt dat $|EC| = 2|EF| = 2x$. We zien nu dat $|BD| = |BC| - |DE| - |EC| = 2 - 3x$. We verlengen zijde FG van het vierkant en noemen het snijpunt met AB punt S. We zien nu dat $|AS| = |AB| - |BS| = 1 - |EF| = 1 - x$. Merk op dat de hoek ASG een rechte hoek is. Wegens de stelling van Pythagoras geldt dat $|AG|^2 = |SG|^2 + |AS|^2 = |BD|^2 + (1-x)^2$, oftewel $1^2 = (2-3x)^2 + (1-x)^2$, aangezien $|AG| = |AB| = 1$. Uitwerken geeft $10x^2 - 14x + 4 = 0$. De twee oplossingen zijn $x = 1$ en $x = \frac{2}{5}$. Omdat $x < |AB| = 1$ volgt dat $x = \frac{2}{5}$ de enige oplossing is.



C-opgaven

C1. Als we twee getallen willen optellen, schrijven we ze onder elkaar op en tellen dan cijfers van rechts naar links bij elkaar op. Als op een gegeven moment de som van twee cijfers groter is dan 9, dan moet je *een* 1 *onthouden* om mee te nemen naar de optelling van de twee cijfers in de volgende positie (een positie naar links).

Laat n een getal zijn waarvan de som van de cijfers gelijk is aan s. Bekijk nu het getal $n + 2016$. We kunnen de som van de cijfers eenvoudig afleiden uit de optelling. Als het niet voorkomt dat je ergens een 1 moet onthouden, dan is de som van de cijfers van $n + 2016$ gelijk aan $s + 2 + 1 + 6 = s + 9$. Telkens wanneer het voorkomt dat je ergens een 1 moet onthouden, dan daalt de som van de cijfers met 9. Immers, als je twee cijfers x en y bij elkaar optelt die samen meer dan 9 zijn, dan wordt het cijfer daaronder $x + y - 10$ in plaats van $x + y$, terwijl je een 1 onthoudt waardoor het cijfer links ervan 1 groter wordt. Al met al wordt de som van de cijfers hierdoor 9 kleiner.

Als je bijvoorbeeld $n = 1015$ *neemt (met* $s = 1 + 0 + 1 + 5 = 7$*), dan moet je in de optelling* $n + 2016 = 3031$ *éénmaal een* 1 *onthouden. Er geldt dan ook dat* $3 + 0 + 3 + 1 = (s + 9) - \mathbf{1} \cdot 9$. *Neem je bijvoorbeeld* $n = 3084$ *(met* $s = 15$*), dan moet je in de optelling* $n + 2016 = 5100$ *tweemaal een* 1 *onthouden. Inderdaad geldt dan dat* $5 + 1 + 0 + 0 = (s + 9) - \mathbf{2} \cdot 9$.

De 2016-invariante getallen zijn dus precies de getallen waarbij je, als je er 2016 bij optelt, precies één keer een 1 moet onthouden.

(a) Na alle waarnemingen hierboven concluderen we dat we op zoek zijn naar het grootste getal van vier cijfers met de eigenschap dat je precies één keer een 1 moet onthouden als je er 2016 bij optelt. Dit getal is 9983. In de optelling $9983 + 2016$ moet je precies één keer een 1 onthouden (op de plek van de duizendtallen) en als je een van de cijfers 8 of 3 groter maakt, dan moet je nog een extra keer een 1 onthouden (op de positie van de eenheden of de tientallen).

(b) We willen weten bij hoeveel van de getallen n van 1 tot en met 9999 je precies één keer een 1 moet onthouden als je er 2016 bij optelt. We splitsen dit op in vier gevallen behorende bij de positie waarbij je die 1 moet onthouden. In elk geval bekijken de mogelijke waarden van de cijfers van n.

- Bekijk eerst het geval waarbij je alleen een 1 moet onthouden op de plek van de duizendtallen. Op deze plek moet dan een 8 of een 9 staan. Op de plek van de eenheden mag alleen een 0, 1, 2 of 3 staan, op de plek van de tientallen mag elk cijfer behalve de 9 (omdat je anders in $1 + 9$ een 1 moet onthouden) en op de plek van de honderdtallen mag elk cijfer staan. In totaal vinden we in dit geval dus $2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4 = 720$ getallen die 2016-invariant zijn.
- Er zijn geen getallen waarbij je alleen op de plek van de honderdtallen een 1 moet onthouden. Immers, je kunt alleen op deze plek een 1 moeten onthouden als je daar een extra 1 hebt die je op de plek van de tientallen moest onthouden.
- Bekijk nu het geval waarbij je alleen op de plek van de tientallen een 1 moet onthouden. Op de plek van de eenheden kan alleen een 0, 1, 2 of 3 staan en op de plek van de tientallen moet een 9 staan. Omdat er nu 1 onthouden wordt op de plek van de tientallen, kun je op de plek van de honderdtallen geen 9 meer hebben (in de optelling $990 + 2016$ zou je namelijk twee keer een 1 moeten onthouden). Voor de plek van de duizendtallen zijn alle cijfers behalve 8 en 9 mogelijk. In totaal vinden we in dit geval dus $8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 4 = 288$ getallen die 2016-invariant zijn.
- Bekijk ten slotte het geval waarbij je alleen op de plek van de eenheden een 1 moet onthouden. Voor het cijfer op de plek van de eenheden zijn de mogelijkheden dan 4, 5, 6, 7, 8 en 9. Het cijfer op de plek van de tientallen mag, behalve een 9, ook geen 8 zijn, omdat je anders ook op de plek van de tientallen een 1 moet onthouden (bijvoorbeeld bij $84 + 2016$). Op de plek van de honderdtallen mag elk cijfer staan en op de plek van de duizendtallen mag elk cijfer staan behalve een 8 of een 9. In totaal zijn er in dit geval dus $8 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 = 3840$ getallen die 2016-invariant zijn.

Al met al hebben we dus gevonden dat er $720 + 288 + 3840 = 4848$ getallen zijn tussen de 1 en 9999 die 2016-invariant zijn.

C2. Er zijn vier studenten die in de hoek zitten, want $n, m \geqslant 2$. Zij schudden elk drie andere mensen de hand. Afgezien van deze vier studenten in de hoeken zijn er nog $m - 2$ studenten die helemaal vooraan zitten, $m - 2$ die achteraan zitten, $n - 2$ studenten die in de meest linkse rij zitten en $n - 2$ in de meest rechtse rij. Deze $2n + 2m - 8$ studenten schudden elk vijf andere mensen de hand. De overige $mn - 4 - (2n + 2m - 8) = mn - 2n - 2m + 4$ studenten schudden ieder acht andere mensen de hand. In totaal is dat

$$4 \cdot 3 + (2n + 2m - 8) \cdot 5 + (mn - 2n - 2m + 4) \cdot 8 = 8mn - 6n - 6m + 4.$$

Dit aantal is precies tweemaal het aantal keren dat er handen geschud is, aangezien er bij elke keer handen schudden twee studenten betrokken zijn. We vinden dus dat $8mn - 6n - 6m + 4 = 2040$, oftewel $16mn - 12n - 12m = 4072$. We kunnen deze vergelijking ook schrijven als

$$(4m - 3) \cdot (4n - 3) = 4081.$$

De getallen $4m - 3$ en $4n - 3$ hebben allebei rest 1 bij deling door 4 en bovendien zijn $4m - 3$ en $4n - 3$ allebei groter dan 1. Als we kijken naar de priemfactorisatie $4081 = 7 \cdot 11 \cdot 53$, dan zien we dat er maar één manier is om 4081 te schrijven als het product van twee getallen groter dan 1 met rest 1 bij deling door 4: namelijk als $77 \cdot 53$. We vinden dus dat $4m - 3 = 77$ en $4n - 3 = 53$ (of andersom). We komen er dan op uit dat $m = 20$ en $n = 14$ (of andersom). In beide gevallen zien we dat het totaal aantal studenten gelijk is aan $20 \cdot 14 = 280$.