Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

22 januari – 1 februari 2018

Uitwerkingen

A1. B) 4 Een stoel met een kind erop heeft in totaal 6 poten en benen. Een kruk met een kind erop heeft in totaal 5 poten en benen. Met 7 stoelen hebben we al $7 \times 6 = 42$ poten en benen en dat is te veel. We maken een tabel met het aantal stoelen en het aantal poten en benen

Aantal stoelen:	0	1	2	3	**4**	5	6
Aantal poten en benen:	0	6	12	18	**24**	30	36
Resterende poten en benen:	39	33	27	21	**15**	9	3

Het resterende aantal poten en benen moet komen van de kinderen die op krukken zitten. Dat aantal moet dus deelbaar zijn door 5. Het enige getal uit de derde rij dat deelbaar is door 5, is 15. Het aantal stoelen is dus 4 (en het aantal krukken is $\frac{15}{5} = 3$).

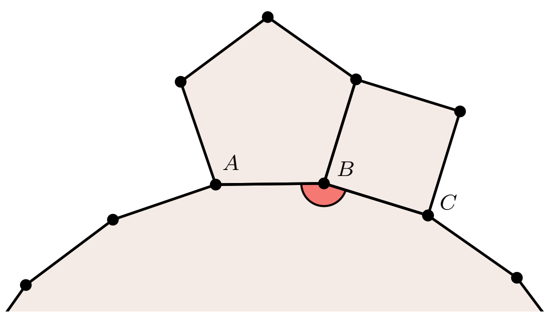
A2. C) C De uitspraken van C en E kunnen niet allebei waar zijn want dan zou E namelijk een schurk zijn, in tegenspraak met het feit dat hij de waarheid vertelde. Op dezelfde manier kunnen de uitspraken van B, C en D niet alle drie tegelijk waar zijn, want dan zou D een schurk zijn terwijl hij juist de waarheid sprak. De schurk moet dus C of E zijn en tegelijkertijd B, C of D zijn. De enige mogelijkheid is daarom dat C de schurk is.

Ten slotte merken we op dat de situatie waarin alleen C een schurk is inderdaad mogelijk is. Als alleen C en D schoenmaat 40 hebben, C, D en E een goudvis hebben en C de enige schurk is, dan zijn uitspraken A, B, D en E allemaal waar en is uitspraak C onwaar.

A3. B) 10 De hoeken van een regelmatige n-hoek zijn gelijk aan $180 - \frac{360}{n}$ graden. Immers, als je de n-hoek rondloopt, dan verander je n keer van looprichting, waarna je in totaal 360 graden bent gedraaid. Bij elk hoekpunt verandert je looprichting dus met $\frac{360}{n}$ graden en is de bijbehorende hoek van de n-hoek gelijk aan $180 - \frac{360}{n}$ graden.

De hoeken van een vierkant zijn dus $180 - 90 = 90$ graden en die van een regelmatige vijfhoek zijn $180 - 72 = 108$ graden.

Als we een vierkant en een regelmatige vijfhoek tegen elkaar leggen, zoals in de figuur, dan sluiten ze samen een hoek van $360 - 90 - 108 = 162$ graden in (hoek ABC in de figuur). Aangezien $162 = 180 - 18$, is dat precies de hoek van een regelmatige twintighoek want $18 = \frac{360}{20}$. De zijden AB en BC zijn even lang, dus na twintig stappen (10 vierkanten en 10 vijfhoeken) zijn we precies rond en vormen de binnenste zijden van de vierkanten en vijfhoeken de zijden van een regelmatige twintighoek.



A4. D) 7 De enige lijst met 9 getallen die aan de eerste eis voldoet, bestaat uit de negen cijfers elk los als getal. Deze lijst voldoet niet aan de tweede eigenschap (want 2 is bijvoorbeeld deelbaar door 1).

Een lijst met 8 getallen die aan de eerste eis voldoet moet bestaan uit zeven getallen van één cijfer en een getal van twee cijfers. Volgens de tweede eigenschap kunnen er echter niet meer dan vijf cijfers los voorkomen: naast de cijfers $5, 7, 9$ kan hooguit één van de cijfers $1, 2, 4, 8$ en hooguit één van de cijfers $3, 6$ los voorkomen.

Een lijst met 7 getallen die voldoet bestaat wel, bijvoorbeeld: 5, 6, 7, 8, 9, 23, 41. De maximale lengte van Julians lijst is dus 7.

A5. E) 4 De acht mensen die Quintijn op het feestje ontmoet noemen we even A, B, C, D, E, F, G en H in opklimmende volgorde van het aantal handen dat ze schudden. Omdat er in totaal 9 mensen aanwezig zijn, is het aantal handen dat iemand schudt altijd een getal van 0 tot en met 8. Als iemand 8 handen schudt, dan schudt hij ieders hand en kan niemand 0 handen schudden. De antwoorden die Quintijn hoort zijn dus óf de getallen 0 tot en met 7 óf de getallen 1 tot en met 8. We bekijken de twee gevallen apart.

- Stel A, B, ..., H schudden $0, 1, \ldots, 7$ handen.
  Persoon H schudt 7 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A. Persoon B schudt naast H verder niemand meer de hand.

  Persoon G schudt 6 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A en B. Persoon C heeft nu al 2 handen geschud (met H en G) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon F schudt 5 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B en C. Persoon D heeft dan al 3 handen geschud (met H, G en F) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon E schudt 4 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B, C en D.

  We zien dat Quintijn precies vier mensen de hand schudt, namelijk H, G, F en E.
- Stel A, B, ..., H schudden $1, 2, \ldots, 8$ handen.
  Persoon H schudt 8 handen en schudt dus handen met iedereen. Persoon A schudt naast H verder niemand meer de hand.

  Persoon G schudt 7 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A. Persoon B heeft nu al 2 handen geschud (met H en G) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon F schudt 6 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A en B. Persoon C heeft dan al 3 handen geschud (met H, G en F) en schudt niemand anders de hand.

  Persoon E schudt 5 handen en schudt dus handen met iedereen behalve A, B en C. Persoon D heeft dan al 4 handen geschud (met H, G, F en E) en schudt niemand anders de hand.

  We zien dat Quintijn precies vier mensen de hand schudt, namelijk H, G, F en E.

We concluderen dat Quintijn in beide gevallen precies vier mensen de hand schudt.

A6. E) 34 De eis dat n deelbaar is door 4, $n+1$ deelbaar is door 5 en $n+2$ deelbaar is door 6 komt op hetzelfde neer als de eis dat $n-4$ deelbaar is door 4, 5 en 6. We zoeken dus getallen n waarvoor $n-4$ deelbaar is door het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 4, 5 en 6, wat 60 is. We vinden zo de getallen

$$4,\ 64,\ 124,\ 184,\ \ldots,\ 1984,$$

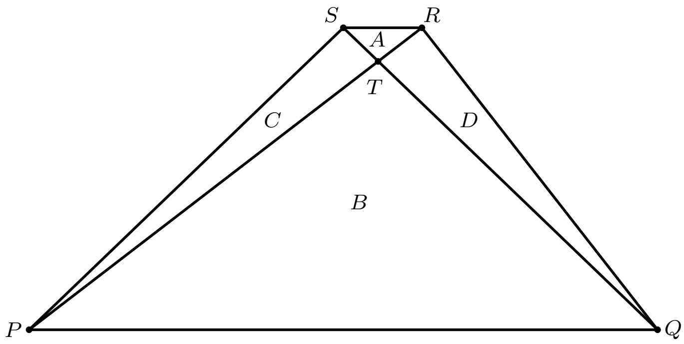
waarbij $1984 = 4 + 33 \times 60$. Samen zijn dat 34 getallen.

A7. E) alleen de slak Ongeacht de sprongen die de kikker maakt, blijft de x-coördinaat van de kikker altijd even. Een sprong van type 1 verandert de x-coördinaat namelijk helemaal niet, en een sprong van type 2 of 3 telt er -2 of 4 bij op. De kikker kan de worm dus niet bereiken. Als we nu kijken naar $x - y$, dan zien we dat dat voor de punten die de kikker kan bereiken altijd een vijfvoud is. Immers, in het begin geldt $x - y = 0$ en bij de drie type sprongen verandert $x - y$ met respectievelijk $0 - (-5) = 5$, met $-2 - 3 = -5$ en met $4 - 9 = -5$. De kever kan dus ook niet bereikt worden.

De slak kan wel bereikt worden. Het is handig om een sprong van type 1 en type 3 te combineren. Samen verplaatsen ze de kikker van positie (x, y) naar $(x + 4, y + 4)$. Door 505 keer deze combinatie uit te voeren landt de kikker op positie $(2020, 2020)$. Door ten slotte eenmaal een sprong van type 2 te doen eindigt de kikker op $(2018, 2023)$ waar de slak zit.

A8. E) $A : C = D : B$ De hoekpunten van het trapezium geven we aan met P, Q, R en S en het snijpunt van de diagonalen met T, zoals in de figuur. Ten opzichte van de diagonaal PR hebben driehoeken TRS en TPS dezelfde hoogte. Hun oppervlaktes, A en C, verhouden zich daarom als $|TR| : |TP|$. Op dezelfde manier is ook de verhouding tussen D en B gelijk aan $|TR| : |TP|$. We zien dus dat $A : C = D : B$. Dit geldt voor elk trapezium dat Harold kan tekenen, dus antwoord E) is correct.

Om in te zien dat de andere antwoorden incorrect zijn bekijken we het specifieke trapezium in de figuur. We zien dat oppervlakte B veel groter is dan de andere drie oppervlaktes, dus de antwoorden A), B) en C) vallen direct af. Driehoeken PRS en QRS hebben gelijke basis en hoogte en dus ook gelijke oppervlakte. Ook C en D zijn dus gelijk (dit geldt voor elk trapezium dat Harold kan tekenen). We zien dus dat $D : C$ gelijk is aan 1, terwijl $A : B$ veel kleiner dan 1 is. Ook antwoord D) valt daarom af.



B1. 33 jaar Gegeven is dat Rosa's moeder drie jaar geleden vijfmaal zo oud was als Rosa toen was. Uit de gegevens leiden we bovendien af dat Rosa's oma toen tweemaal zo oud was als Rosa's moeder. We concluderen dat Rosa's oma toen tienmaal zo oud was als Rosa toen was.

Laten we Rosa's huidige leeftijd x noemen. Haar oma was drie jaar geleden dus $10(x - 3)$ jaar oud. Gegeven is dat ze nu 7 keer zo oud is als Rosa. Drie jaar geleden was ze dus $7x - 3$ jaar oud. Er moet daarom gelden dat $10(x - 3) = 7x - 3$. Vereenvoudigen geeft $3x = 27$ en dus $x = 9$. Drie jaar geleden was Rosa dus $9 - 3 = 6$ jaar. Rosa's moeder was toen $5 \times 6 = 30$ jaar en is nu dus 33 jaar oud.

B2. 49998 Het begingetal van vijf cijfers noemen we x en het cijfer dat Mike voor het getal zet noemen we c. Het getal van Nanda is dus $10x + 4.000.008$ en het getal van Mike is $x + c \cdot 100.000$. Het feit dat Nanda's getal zesmaal zo groot is als dat van Mike betekent dat $10x + 4.000.008 = 6x + 6c \cdot 100.000$. Vereenvoudigen geeft $4x = c \cdot 600.000 - 4.000.008$ oftewel $x = 150.000 \cdot c - 1.000.002$.

Voor $c \leqslant 6$ krijgen we $x \leqslant 150.000 \cdot 6 - 1.000.002 = 900.000 - 1.000.002 < 0$. Omdat x positief is, moet dus gelden dat $c > 6$.

Voor $c \geqslant 8$ krijgen we $x \geqslant 150.000 \cdot 8 - 1.000.002 = 1.200.000 - 1.000.002 = 199.998$. Dit is te groot aangezien x een getal van vijf cijfers is. Er moet dus gelden dat $c < 8$.

De enige mogelijkheid is daarom $c = 7$. Voor x vinden we dan $x = 150.000 \cdot 7 - 1.000.002 = 49.998$.

B3. 15 De diagonaal van het vierkant is $\sqrt{2}$ maal zo lang als de zijde van het vierkant. De diameters van de twee cirkels verhouden zich dus als $1 : \sqrt{2}$ en daarmee verhouden hun oppervlaktes zich als $1 : 2$ want de oppervlakte schaalt met het kwadraat van de diameter.

Omdat de oppervlakte van de grote cirkel tweemaal zo groot is als die van de kleine cirkel, is de oppervlakte van de vier lichtgrijze stukken en de vier donkergrijze stukken samen gelijk aan de oppervlakte van de kleine cirkel.

De kleine cirkel en de vier donkergrijze stukken vormen samen het vierkant en hebben dus samen een oppervlake van 60. Met de eerdere opmerking concluderen we nu dat de oppervlakte van vier lichtgrijze stukken en acht donkergrijze stukken samen gelijk is aan 60.

De gevraagde oppervlakte van één lichtgrijs stuk en twee donkergrijze stukken is dus gelijk aan een kwart hiervan: $\frac{60}{4} = 15$.

B4. 19 In een hoekpunt komen altijd drie verschillende getallen samen. Opgeteld geven die dus minstens $1 + 2 + 3 = 6$. Bekijken we twee tegenoverliggende hoekpunten, dan tellen we elk zijvlak éénmaal mee en vinden we dat de ogensom minstens $2 \times 6 = 12$ is. Op dezelfde manier kunnen we beredeneren dat de ogensom hooguit $4 + 5 + 6 + 4 + 5 + 6 = 30$ is.

We zullen nu laten zien dat alle aantallen van 12 tot en met 30 daadwerkelijk voor kunnen komen als ogensom van een schijndobbelsteen. Bekijk de drie paren van tegenoverliggende zijvlakken. Voor elk van de vlakken in het eerste paar kiezen we 3 of 4 als getal. Voor elk van de vlakken van het tweede paar kiezen we 2 of 5 en voor elk vlak van het derde paar kiezen we 1 of 6. In elk hoekpunt zit nu precies één getal uit elk van de drie paren $\{3, 4\}$ en $\{2, 5\}$ en $\{1, 6\}$. Het resultaat is dus altijd een schijndobbelsteen.

Als je de getallen in het eerste paar optelt, zijn de mogelijke uitkomsten dus $6, 7, 8$. De mogelijkheden voor het tweede paar zijn $4, 7, 10$ en de mogelijkheden voor het derde paar zijn $2, 7, 12$. Tellen we de vier getallen van de eerste twee paren op, dan zijn de mogelijke uitkomsten dus $4+6, 4+7, 4+8,\ 7+6, 7+7, 7+8,\ 10+6, 10+7, 10+8$, oftewel de getallen 10 tot en met 18. De mogelijkheden voor de totale ogensom zijn daarom de getallen 12 t/m 20, 17 t/m 25 en 22 t/m 30. Elk getal van 12 tot en met 30 is dus de ogensom van een schijndobbelsteen. In totaal zijn er dus 19 mogelijke ogensommen.