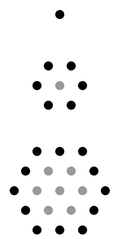
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

23 januari – 2 februari 2017

Uitwerkingen

A1. C) donderdag In de eerste vier weken van augustus komt elke dag van de week precies viermaal voor. De laatste $31 - 4 \times 7 = 3$ dagen van augustus zijn de dagen van de week die vijfmaal voorkomen in augustus. Maandag en vrijdag kunnen dus niet een van die laatste drie dagen zijn. De enige mogelijkheid is dat de laatste drie dagen dinsdag, woensdag en donderdag zijn. De laatste dag van augustus is dus een donderdag.

A2. D) 169 Stel dat we met de eerste zeshoek beginnen (een losse stip). Dan kunnen we daar de volgende zeshoek uit krijgen door rondom de stip zes nieuwe stippen te zetten. Vervolgens kunnen we de derde zeshoek krijgen door rondom de huidige zeshoek weer een nieuwe laag toe te voegen aan de rand. In dit geval voegen we twaalf nieuwe stippen toe. We zien dat het aantal stippen dat je aan de rand toe moet voegen om de volgende zeshoek te krijgen telkens met zes toeneemt. Dit is omdat het aantal stippen op elk van de zijdes van de zeshoek met één toeneemt.



Na 19 is het volgende zeshoeksgetal dus $19 + 18 = 37$, dan krijgen we $37 + 24 = 61$, dan $61 + 30 = 91$, dan $91 + 36 = 127$, dan $127 + 42 = 169$ en ten slotte $169 + 48 = 217$. We zien dat van de vijf gegeven getallen alleen 169 een zeshoeksgetal is.

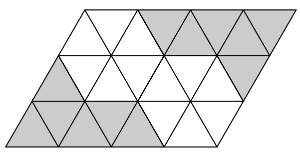
A3. C) 3 Hoogstens één van de uitspraken van Eva, Fatima en Kees kan juist zijn. Minstens twee van hen liegen dus en zijn schuldig. Hieruit kunnen we al concluderen dat Eva en Kees liegen en dus schuldig zijn. Daarom spreekt Mustafa de waarheid en is dus onschuldig.

Fatima kan niet de waarheid spreken, want dan zijn zij en Mustafa allebei onschuldig, wat haar eigen bewering tegenspreekt. Fatima is dus schuldig.

Manon kan niet liegen, want dan zou zij schuldig zijn en zou Mustafa de enige onschuldige zijn. Maar dan zou Fatima dus toch de waarheid spreken.

We concluderen dat Manon en Mustafa de enige onschuldigen zijn. Dat klopt ook inderdaad met hun eigen beweringen en met de leugens van de andere drie.

A4. E) $\frac{1}{2}$ We kunnen de zeshoeken elk opdelen in zes even grote gelijkzijdige driehoekjes. Met nog eens twaalf van deze gelijkzijdige driehoekjes kunnen we het parallellogram completeren, zie de figuur. We zien nu dat de twee grijze gebieden samen precies $\frac{12}{24}$ van het parallellogram beslaan. De gezamenlijke oppervlakte van de grijze gebieden is dus $1 \cdot \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.



A5. D) 222 De breuk $\frac{83+74+65}{20-19}$ geeft als uitkomst 222. Dat dit ook de grootst mogelijk uitkomst is, zien we als volgt.

Merk allereerst op dat de teller altijd kleiner is dan $100 + 100 + 100 = 300$. Als de noemer groter is dan 1, is de uitkomst dus kleiner dan $\frac{300}{2} = 150$. Om een uitkomst van 222 of meer te krijgen moet de noemer dus wel gelijk zijn aan 1.

De enige manieren om noemer 1 te krijgen zijn via $20-19, 30-29, \ldots, 80-79$. In alle gevallen zit er een 9 in de noemer, dus zijn de grootste cijfers die over zijn voor de teller 8, 7, 6, 5, 4 en 3. Om de teller te maximaliseren zetten we de drie grootste cijfers op de positie van de tientallen. De plaatsing van de overige drie cijfers maakt daarna niet uit voor de uitkomst: $80+70+60+5+4+3=222$.

A6. B) 3 We bekijken een route van het vakje linksonder naar het vakje rechtsboven. Deze route telt $99+99=198$ stappen. De getallen op de vakjes langs deze route noemen we $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{198}$.

We weten dat $a_0=0$, $a_1=1$ en $a_2=3$. Om het volgende getal, a_3, uit te rekenen moeten we de getallen a_0, a_1 en a_2 optellen en 1 optellen voor elke stap die we zetten. We vinden dan dat $a_3=(a_0+1)+(a_1+1)+(a_2+1)=7$. Om vervolgens het getal daarna, dat is a_4, uit te rekenen moeten we weer dezelfde som nemen en daar a_3+1 bij optellen. We zien dus dat $a_4=a_3+(a_3+1)=15$. In het algemeen zien we dat

$$a_{k+1}=(a_1+1)+\ldots+(a_{k-1}+1)+(a_k+1)=a_k+(a_k+1)=2a_k+1.$$

Kijken we alleen naar de laatste cijfers, dan zal opvallen dat deze zich herhalen; na de eerste 0 komen namelijk: $1,3,7,5,1,3,7,5$, enzovoorts. Het is makkelijk te verklaren waarom deze regelmaat optreedt. Het laatste cijfer van a_{k+1} hangt namelijk alleen af van het laatste cijfer van a_k. Om deze reden zet deze regelmaat zich door tot en met a_{198}. We zien daarom dat de getallen $a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, \ldots, a_{198}$ allemaal op een 3 eindigen.

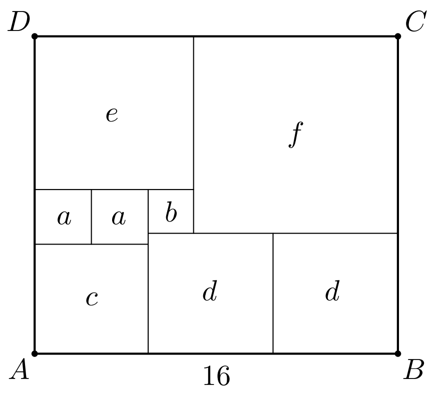
A7. D) $\frac{29}{2}$ In elk van de vierkantjes hebben we de zijdelengte aangegeven met een letter. We zien dat geldt: $2a+2d=16$ en dus $d=8-a$. Op dezelfde manier kunnen we de andere zijdelengtes uitdrukken in a via de volgende relaties die we zien in de figuur:

$$\begin{aligned}
c &= 2a,\\
b &= a+c-d=3a-(8-a)=4a-8,\\
e &= 2a+b=6a-8,\\
f &= b+e=(4a-8)+(6a-8)=10a-16.
\end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook dat $e+f=16$, dus vinden we dat $(6a-8)+(10a-16)=16$. Dit geeft $16a=40$ en dus $a=\frac{5}{2}$.

De lengte van zijde AD kunnen we nu uitdrukken als

$$|AD|=a+c+e=3a+(6a-8)=9a-8=\frac{45}{2}-8=\frac{29}{2}.$$



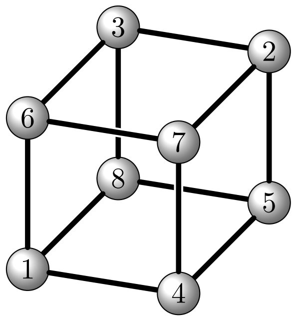
A8. E) de vijfde We bekijken welke figuur de uitslag kan zijn van Joeps kubus.

Twee tegenoverliggende zijvlakken van de kubus gebruiken samen precies alle acht getallen éénmaal. De getallen op tegenoverliggende zijvlakken moeten samen dus gelijk zijn aan $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$. De eerste figuur valt daarom af, want die heeft de getallen 18 en 17 op tegenoverliggende zijvlakken staan terwijl $18 + 17 \neq 36$. Ook de tweede figuur valt af, want die heeft 18 en 20 op tegenoverliggende zijvlakken staan.

De derde figuur valt af, want dat is geen uitslag van een kubus: wanneer we de figuur opvouwen komen de vierkanten met de getallen 10 en 19 over elkaar heen te liggen.

Het getal op elk zijvlak moet minstens $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ zijn. Hiermee valt ook de vierde figuur af.

De vijfde figuur, ten slotte, kan *wel* Joeps uitslag zijn. Hieronder zie je hoe de getallen 1 tot en met 8 over de hoekpunten verdeeld kunnen zijn zó dat voor elk zijvlak de getallen op de vier hoekpunten samen 18 zijn.



B1. 911 We gaan kijken naar de mogelijke begingetallen van Isaac. We onderscheiden drie gevallen: er kunnen één, twee of drie verschillende cijfers voorkomen in het begingetal van Isaac.

- Als er maar één cijfer voorkomt in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{aaa}$ (hiermee bedoelen we het getal bestaande uit drie keer het cijfer a). Dilara schrijft dan vervolgens geen getallen op, want er is geen ander getal dat je kunt krijgen door de cijfers van $\overline{aaa}$ in een andere volgorde op te schrijven. De som is vervolgens $\overline{aaa}$ en dat is altijd kleiner dan 1221.
- Als er twee verschillende cijfer voorkomen in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ of $\overline{baa}$ (met $a \neq b$). Als Isaacs getal een van die drie getallen is, dan schrijft Dilara de andere twee op. De som wordt dan $\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa}$. We zien dat dat op een 1 moet eindigen, dus $b + a + a = 11$ of $b + a + a = 21$. Maar als $b + a + a = 21$, dan zien we dat de totale som al minstens 2100 wordt (omdat de som van de eerste cijfers ook 21 is) en dat is meer dan 1221. De enige optie is $b + a + a = 11$.

  Om een zo groot mogelijk begingetal te vinden, willen we een zo groot mogelijk cijfer om mee te beginnen. We zien dat a hooguit 5 kan zijn, maar b kan 9 worden als a gelijk aan 1 is. We proberen $b = 9$ en $a = 1$ en we bekijken het begingetal $\overline{baa} = 911$. Dan schrijft Dilara de getallen 191 en 119 op en dan zien we dat de som $911 + 191 + 119$ inderdaad gelijk aan 1221 is.
- Als er drie verschillende cijfers voorkomen in het begingetal, dan is het begingetal van de vorm $\overline{abc}$ (met a, b en c verschillend). Dilara schrijft dan de getallen $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ en $\overline{cba}$ op. Als we nu deze zes getallen bekijken, dan zien we dat voor het laatste cijfer er twee keer het cijfer a, twee keer het cijfer b en twee keer het cijfer c voorkomt. Het laatste cijfer van de som is dus het laatste cijfer van $2a + 2b + 2c$. Dit cijfer is echter altijd even, terwijl het laatste cijfer van 1221 oneven is. De som kan dus nooit gelijk worden aan 1221.

We hebben gezien dat het begingetal van Isaac uit twee verschillende cijfers moet zijn samengesteld en dat het grootste begingetal waarvoor de som 1221 wordt het getal 911 is.

B2. $(13, 2, 8)$ en $(5, 6, 4)$ We trekken de tweede vergelijking van de eerste af. Dat geeft

$$ab + c - a - bc = 5.$$

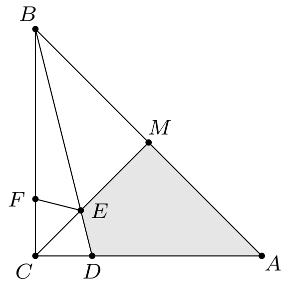
De linkerkant van deze vergelijking is ook te schrijven als $(a - c)(b - 1)$. We vinden dus dat $(a - c)(b - 1) = 5$. Omdat b een positief geheel getal moet zijn, zien we dat de factor $b - 1$ niet negatief kan zijn. Aangezien 5 een priemgetal is, zijn er dan twee mogelijkheden: $b - 1 = 1$ en dus $b = 2$ of $b - 1 = 5$ en dus $b = 6$.

Als $b = 2$, dan vinden we ook meteen dat $a - c = 5$. Als we dat optellen bij de vergelijking $ab + c = 34$, dan vinden we $a + ab = 39$. Aangezien $b = 2$, geeft dit $a = 13$ en daarmee $c = 8$. Als we $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen, dan zien we dat dit inderdaad een oplossing is.

Als $b = 6$, dan vinden we ook meteen dat $a - c = 1$. Nu tellen we dat op bij de vergelijking $ab + c = 34$ en vinden we $a + ab = 35$. In dit geval hadden we $b = 6$ en dus $a = 5$. We vinden dan ook meteen dat $c = 4$. Als we $(a, b, c) = (5, 6, 4)$ invullen in de oorspronkelijke vergelijkingen, dan zien we dit ook een oplossing is.

De twee oplossingen zijn dus $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ en $(a, b, c) = (5, 6, 4)$.

B3. $\frac{162}{5}$ De oppervlakte van $\triangle AMC$ is de helft van de oppervlakte van $\triangle ABC$. De oppervlakte van $\triangle ABC$ is $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$. De oppervlakte van $\triangle AMC$ is dus 36. Om de oppervlakte van vierhoek $AMED$ te bepalen willen we nu alleen nog de oppervlakte van $\triangle CDE$ bepalen.



Laat F het punt zijn dat je krijgt als je D spiegelt in CE. Vanwege symmetrie zien we dan dat $\triangle CEF$ dezelfde oppervlakte heeft als $\triangle CDE$. Bovendien weten we dan ook dat $|CF| = 3$ en $|BC| = 12$. Driehoeken BCE en CEF hebben dezelfde hoogte, maar de basis van $\triangle BCE$ is vier keer zo groot. De oppervlakte van $\triangle BCE$ is dus vier keer de oppervlakte van $\triangle CEF$ (of $\triangle CDE$).

Als we driehoek CDE daaraan toevoegen zien we dat $\triangle BCD$ een vijf keer zo grote oppervlakte heeft als $\triangle CDE$. De oppervlakte van $\triangle BCD$ is $\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 18$. Al met al vinden we dan dat $\triangle CDE$ oppervlakte $\frac{18}{5}$ heeft en de oppervlakte van vierhoek $AMED$ is dus gelijk aan $36 - \frac{18}{5} = \frac{162}{5}$.

B4. 27 Om het probleem te vereenvoudigen bekijken we een variant van de quiz. We geven voor elke vraag één extra punt: 6 punten voor een goed antwoord op een moeilijke vraag, 4 punten voor een goed antwoord op een makkelijke vraag en 0 punten voor een fout antwoord. Iedereen krijgt dus precies 10 punten extra, zodat het aantal mogelijke eindscores niet verandert. We zien nu dat alle scores deelbaar zijn door 2 en we delen door 2 om het probleem nog eenvoudiger te maken. Een deelnemer krijgt nu 3, 2 of 0 punten voor elke vraag. Ook dit verandert het aantal mogelijke eindscores niet.

De eindscore is maximaal 30 punten (als alle vragen goed beantwoord worden) en minimaal 0 punten (als alle vragen fout beantwoord worden). Nu gaan we laten zien dat de eindscores 1, 25, 28 en 29 niet mogelijk zijn en dat alle andere scores van 0 tot en met 30 wel mogelijk zijn.

De eindscores $0, 3, 6, \ldots, 30$ kunnen we behalen door eerst respectievelijk $0, 1, 2, 3, \ldots, 10$ vragen goed te beantwoorden en daarna alle vragen fout te beantwoorden.

De eindscores $2, 5, 8, \ldots, 26$ kunnen we behalen door eerst respectievelijk $9, 8, 7, 6, \ldots, 1$ vragen fout te beantwoorden, daarna een makkelijke vraag goed te beantwoorden en vervolgens alle moeilijke vragen daarna goed te beantwoorden.

De eindscores $4, 7, 10, \ldots, 22$ kunnen we behalen door eerst respectievelijk $7, 6, 5, \ldots, 1$ vragen fout te beantwoorden, daarna een makkelijke vraag goed, een moeilijke vraag fout, een makkelijke vraag goed en alle moeilijke vragen daarna goed te beantwoorden.

Als er minstens één vraag goed beantwoord is, dan heb je al ten minste 2 punten. Om die reden is de eindscore 1 niet mogelijk. Als er minstens één vraag fout beantwoord is, dan heb je ten hoogste $9 \cdot 3 = 27$ punten. Om die reden zijn de eindscores 28 en 29 niet mogelijk. Als er precies één vraag fout beantwoord is, dan kunnen er twee dingen gebeurd zijn: de fout beantwoorde vraag is de laatste vraag en je hebt $9 \cdot 3 = 27$ punten, of de fout beantwoorde vraag is niet de laatste vraag en je hebt $8 \cdot 3 + 2 = 26$ punten. Als er minstens twee vragen fout beantwoord zijn, dan heb je ten hoogste $8 \cdot 3 = 24$ punten. Om die reden is ook de eindscore 25 niet mogelijk.

We zien dat de mogelijke eindscores (in het nieuwe quiz-format) de getallen van 0 tot en met 30 zijn, met uitzondering van 1, 25, 28 en 29. (In het oorspronkelijke quiz-format zijn de mogelijke eindscores de even getallen van -10 tot en met 50, met uitzondering van -8, 40, 46 en 48.) Er zijn dus 27 mogelijke eindscores.