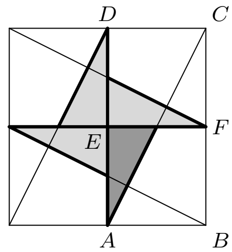
Eerste ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

18 januari – 28 januari 2016

Uitwerkingen

A1. C) 2 De twee getallen van Frank zijn ofwel allebei even ofwel allebei oneven, anders zijn ze opgeteld niet even. De twee getallen van Kees zijn bij elkaar opgeteld $41 - 26 = 15$, dus van zijn getallen moet er één even en één oneven zijn, omdat de som anders niet oneven is. Pieters getallen zijn samen $58 - 41 = 17$, dus van zijn getallen is er ook precies één even. Het minimale aantal even getallen is daarom 2 en dit gebeurt bijvoorbeeld als Frank de getallen 11 en 15 heeft, Kees de getallen 7 en 8 en Pieter de getallen 4 en 13.

A2. D) 36 Eerst kijken we naar rechthoek $ABCD$ en het lijnstuk EF dat de middens van BC en AD verbindt. De diagonaal AC snijdt dat lijnstuk EF precies middendoor. De stervormige figuur kan in vier driehoeken worden opgedeeld, zoals in de figuur hiernaast. Zoals we net gezien hebben, heeft de donker gekleurde driehoek rechtsonder hoogte 6 en basislengte 3 en de oppervlakte is dus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$. Dit geldt ook voor de andere drie driehoeken en de totale oppervlakte van de stervormige figuur is dus 36.

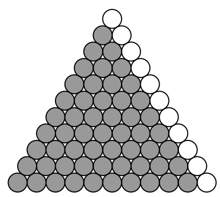


A3. B) 5 Bekijk eerst de getallen die beginnen met het cijfer 1. Een getal is altijd deelbaar door 1, dus aan die eis is altijd voldaan. Nu gaan we kijken welke van de getallen 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 en 19 ook deelbaar zijn door hun laatste cijfer en we zien dat dat 12 en 15 zijn.

Bekijk nu de getallen met begincijfer 2. Om deelbaar te zijn door 2 moet het laatste cijfer van het getal *even* zijn. We hebben dus alleen de mogelijkheden 24, 26 en 28 en we zien dat alleen 24 volledig deelbaar is. Voor de getallen met begincijfer 3 hebben we de mogelijkheden 36 en 39 (de andere zijn niet deelbaar door 3) en zien we dat alleen 36 volledig deelbaar is. Voor de getallen met begincijfer 4 is alleen 48 een mogelijkheid en we zien dat dit ook volledig deelbaar is. Voor de getallen waarvan het begincijfer 5 of groter is, is er geen tweede cijfer zodat het getal deelbaar is door het eerste cijfer. Voor begincijfer 5 zou bijvoorbeeld 55 de enige mogelijkheid geweest zijn, maar die mag niet omdat de twee cijfers verschillend moeten zijn.

In totaal zijn er dus 5 volledig deelbare getallen van twee cijfers: 12, 15, 24, 36 en 48.

A4. E) 165 Eerst tellen we de horizontale achten (∞). De linkercirkel van zo'n acht moet in een van de grijze cirkels liggen, zie de figuur. Omgekeerd kunnen we een horizontale acht maken door een grijze cirkel te kiezen en die dan samen met zijn rechterbuurman te nemen. Het aantal horizontale achten is dus gelijk aan het aantal grijze cirkels en dat zijn er $66 - 11 = 55$. Vanwege symmetrie zijn er dus ook van elk van de twee soorten schuine achten (∞ en ∞) precies 55. In totaal zijn er dus $3 \cdot 55 = 165$ achten.



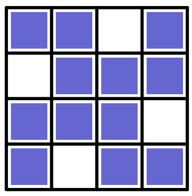
A5. B) 2 Als drie of meer van de getallen een drievoud zijn, dan staan er twee drievouden naast elkaar en zijn die twee getallen bij elkaar opgeteld een drievoud. Dat is niet toegestaan, dus we concluderen dat er hooguit twee drievouden in de cirkel staan.

Stel dat er een of nul drievouden in de cirkel staan. Dan zijn er vier getallen naast elkaar die geen drievoud zijn. Die getallen kunnen niet allemaal dezelfde rest bij deling door 3 geven, want anders zou de som van drie getallen naast elkaar deelbaar door 3 zijn. Als de getallen bijvoorbeeld 1, 4, 7 en 10 zijn, dan is $1 + 4 + 7 = 12$ deelbaar door 3. Van de vier getallen is er dus minstens een die rest 1 geeft bij deling door 3 en ook minstens een die rest 2 geeft bij deling door 3. We kunnen in het bijzonder twee buurgetallen vinden waarvan er een rest 1 en de ander rest 2 heeft bij deling door 3. Hun som is deelbaar door 3 en dat is niet toegestaan. We concluderen dat het niet mogelijk is dat er een (of nul) drievoud(en) in de cirkel staan.

Het is wel degelijk mogelijk dat er twee drievouden in de cirkel staan. Zet bijvoorbeeld $3, 4, 7, 6$ en 1 op die volgorde in de cirkel en dan wordt aan alle eisen voldaan: $3 + 4$, $4 + 7$, $7 + 6$, $6 + 1$ en $1 + 3$ zijn niet deelbaar door 3, en ook $3 + 4 + 7$, $4 + 7 + 6$, $7 + 6 + 1$, $6 + 1 + 3$ en $1 + 3 + 4$ zijn niet deelbaar door 3.

A6. E) 3630 Bekijk een draadmodel van een $10\times10\times10$-kubus. Eerst tellen we de draden die van voor naar achter gaan. Die vormen 11 rijen van 11 draden en dus zijn er $11 \times 11 = 121$ draden die van voor naar achter gaan. Ook zijn er 121 draden die van links naar rechts gaan en 121 draden die van boven naar onder gaan. Elk van die draden heeft lengte 10 dm. De totale lengte van de draden is dus 3630 dm.

A7. D) 12 Een invulling met 12 blauwe vakjes waarbij elk blauw vakje precies één wit buurvakje heeft, kun je in de figuur zien. Een dergelijke kleuring met méér dan 12 blauwe vakjes bestaat niet. Bij een kleuring met 13 of meer blauwe vakjes zijn er namelijk hoogstens 3 witte vakjes. Deze witte vakjes hebben samen niet meer dan $3 \times 4 = 12$ buurvakjes, zodat minstens één blauw vakje geen wit buurvakje heeft.



A8. D) $b + c - a < 3$ We bepalen eerst alle mogelijke oplossingen (a, b, c) van de ongelijkheid $a + 2b + 3c < 12$, met a, b en c verschillende positieve gehele getallen. Uit $3c < 12 - a - 2b \leqslant 9$ volgt dat $c < 3$, dus $c = 2$ of $c = 1$.

- **Geval** $c = 2$ Er geldt $a + 2b < 6$, dus $b < 3$. Omdat b niet gelijk mag zijn aan c, moet b gelijk zijn aan 1. We vinden nu precies één oplossing: $(a, b, c) = (3, 1, 2)$.
- **Geval** $c = 1$ Er geldt $2b < 9 - a \leqslant 8$, dus $b < 4$. Als $b = 3$, dan is $a < 3$ en ongelijk aan 1, dus vinden we alleen de oplossing $(a, b, c) = (2, 3, 1)$. Als $b = 2$, dan geldt $a < 5$, dus $a = 3$ of $a = 4$, want a mag niet gelijk zijn aan 1 of 2. We vinden nu twee oplossingen $(3, 2, 1)$ en $(4, 2, 1)$.

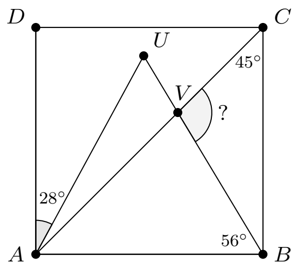
De enige oplossingen (a, b, c) zijn dus $(3, 1, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 2, 1)$ en $(4, 2, 1)$. Omdat $(4, 2, 1)$ niet voldoet aan de ongelijkheden bij A) en B) vallen die antwoorden af. Omdat $(3, 1, 2)$ niet voldoet aan de ongelijkheden bij C) en E) vallen ook die antwoorden af. De vier oplossingen voldoen echter wel allemaal aan de ongelijkheid bij D), dus dat antwoord is het juiste antwoord.

B1. 70707 Stel dat 707070 deelbaar is door d, dan is 707070 ook deelbaar door $\frac{707070}{d}$. De zeven kleinste getallen waardoor 707070 deelbaar is, zijn $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10$. Het zevende getal in de lijst is dus $\frac{707070}{10} = 70707$.

B2. 'AAOOOOAA' (of 'OOAAAAOO') Een woord in de AO-taal bestaat uit een afwisseling van blokken van A's en blokken van O's. Zo heeft 'AA O AAA OOO AA O' bijvoorbeeld drie A-blokken en drie O-blokken. De lettercombinaties 'AO' horen precies bij de overgangen van een A-blok naar een O-blok en de lettercombinaties 'OA' horen bij de overgangen van een O-blok naar een A-blok. Het bovenstaande woord heeft dus drie combinaties 'AO' en twee combinaties 'OA'. Een woord dat begint en eindigt met dezelfde letter heeft evenveel overgangen van A naar O als omgekeerd en dus evenveel lettercombinaties 'AO' als 'OA'. Een woord dat begint met A en eindigt met O heeft één combinatie 'AO' meer, terwijl een woord dat begint met O en eindigt met A juist één combinatie 'OA' meer heeft.

Een woord in de AO-taal is dus speciaal precies dan wanneer begin- en eindletter van het woord gelijk zijn. We zoeken daarom een woord met de eigenschap dat de eerste en laatste letter gelijk zijn. Bovendien moet deze eigenschap blijven gelden wanneer je de eerste of laatste letter weglaat. Dit betekent dat de eerste twee letters van het woord en de laaste twee letters van het woord allemaal gelijk moeten zijn. De enige twee woorden met vier A's en vier O's die daaraan voldoen zijn AAOOOOAA en OOAAAAOO.

B3. $101°$ We bekijken eerst driehoek ABU. De hoek bij A is gelijk aan $90° - 28° = 62°$. Omdat driehoek ABU gelijkbenig is, is ook de hoek bij U gelijk aan $62°$. Omdat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan $180°$, moet de hoek bij B gelijk zijn aan $180° - 62° - 62° = 56°$.



Nu bekijken we driehoek ABC. Driehoek ABC is gelijkbenig. De twee gelijke hoeken bij A en C plus de rechte hoek bij B zijn samen $180°$. Hieruit volgt dat de hoek bij C gelijk is aan $\frac{180°-90°}{2} = 45°$.

Ten slotte bekijken we driehoek BCV. De hoek bij C is gelijk aan $45°$. De hoek bij B is gelijk aan $90° - 56° = 34°$. De hoek bij V is dan gelijk aan $180° - 45° - 34° = 101°$.

B4. Denise Eerst kijken we naar de uitspraak van Helga. Alex en Eva hebben dezelfde kleur ogen en dezelfde kleur haar en ook Chris en Denise hebben dat. Boris, Felix en Gaby daarentegen hebben een unieke combinatie van oog- en haarkleur. Uit de uitspraak van Helga kunnen we dus afleiden dat Boris, Felix en Gaby niet de dief zijn, omdat Helga dat anders had kunnen afleiden uit hun oog- en haarkleur. Alex, Chris, Denise en Eva zijn echter nog steeds mogelijke daders omdat zijn geen unieke combinatie van oog- en haarkleur hebben.

Nu bekijken we de uitspraak van Ingrid. Alex en Felix hebben dezelfde kleur haar en hetzelfde geslacht, net als Boris en Chris en ook Denise en Gaby. Alleen Eva heeft een unieke combinatie van haarkleur en geslacht. Uit de uitspraak van Ingrid kunnen we dus afleiden dat Eva niet de dief is, omdat Ingrid anders had geweten dat Eva de dief was. De andere zes worden door Ingrid's uitspraak niet uitgesloten als dader.

Op basis van de uitspraken van Helga en Ingrid kan Julius concluderen dat Boris, Eva, Felix en Gaby *niet* de dader zijn. Zonder extra informatie kunnen Alex, Chris en Denise echter nog alledrie de dader zijn. Julius heeft een extra gegeven, het geslacht van de dader, waarmee hij nu kan bepalen wie van de drie de dader is. Als de dader een man was, zou hij enkel kunnen afleiden dat het óf Alex óf Chris was. De dader moet dus een vrouw zijn, namelijk Denise.