Nederlandse Wiskunde Olympiade voor Bedrijven

vrijdag 22 januari 2016

Uitwerking uitsmijter

Opgave.
Bekijk de verzameling $\{1, 22, 2016\}$. We nemen steeds twee of meer van de getallen in deze verzameling en tellen die bij elkaar op. Dat kan in dit geval op drie manieren als je twee getallen bij elkaar optelt ($1 + 22 = 23$, $1 + 2016 = 2017$ en $22 + 2016 = 2038$) en op één manier als je drie getallen bij elkaar optelt ($1 + 22 + 2016 = 2039$). Nu zijn de uitkomsten van deze vier optelsommen verschillend. Als je echter een grotere verzameling neemt en precies hetzelfde doet (waarbij je dus nog veel meer optelsommen maakt), kan het zijn dat sommige uitkomsten hetzelfde zijn.

In deze opgave zijn we op zoek naar verzamelingen van vijf verschillende positieve gehele getallen, waarbij er zo min mogelijk verschillende uitkomsten zijn als je steeds twee of meer van de getallen bij elkaar optelt.

a) Bepaal wat het kleinste aantal verschillende uitkomsten is bij zo'n verzameling (van vijf verschillende positieve gehele getallen).

b) Geef een voorbeeld van zo'n verzameling (van vijf verschillende positieve gehele getallen) die dat kleinste aantal verschillende uitkomsten geeft.

c) Bepaal alle mogelijke verzamelingen (van vijf verschillende positieve gehele getallen) die dat kleinste aantal verschillende uitkomsten geven én waarbij één van de getallen gelijk is aan 2016.

Antwoorden.

a) 13.

b) Bijvoorbeeld $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Elk voorbeeld van de vorm $\{a, 2a, 3a, 4a, 5a\}$ is correct.)

c) $\{504, 1008, 1512, \mathbf{2016}, 2520\}$;
$\{672, 1344, \mathbf{2016}, 2688, 3360\}$;
$\{1008, \mathbf{2016}, 3024, 4032, 5040\}$;
$\{\mathbf{2016}, 4032, 6048, 8064, 10080\}$.

Voor de uitwerking, zie ommezijde.

Uitwerking.
Voor vijf positieve gehele getallen $a < b < c < d < e$ geldt

$$a + b < a + c < a + d < a + e < b + e < c + e < d + e < a + d + e < b + d + e < \\ c + d + e < a + c + d + e < b + c + d + e < a + b + c + d + e,$$

waarbij we in een stap als $d+e < a+d+e$ gebruiken dat a positief is. Dus er zijn altijd minstens 13 verschillende uitkomsten. De verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ is een voorbeeld met ook echt niet meer dan 13 uitkomsten; de uitkomsten liggen immers tussen de $1+2 = 3$ en $1+2+3+4+5 = 15$ en dat zijn precies 13 gehele getallen. Dus a) het kleinste aantal verschillende uitkomsten is 13 en b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ is hier een voorbeeld van.

Voor onderdeel c) gaan we eerst onderzoeken hoe zo'n *optimale* verzameling er in het algemeen uitziet. Voor zo'n verzameling $\{a, b, c, d, e\}$ met $a < b < c < d < e$ zijn bovenstaande 13 uitdrukkingen dus alle mogelijke uitkomsten die je kunt krijgen als je twee of meer van de getallen uit de verzameling bij elkaar optelt. Hierboven noemden we al dat

$$a + c < a + d < a + e < b + e < c + e,$$

maar net zo goed geldt natuurlijk

$$a + c < b + c < b + d < c + d < c + e.$$

Dus hier staan twee keer dezelfde vijf getallen. Maar dan moet wel gelden dat $a + d = b + c$, $a + e = b + d$ en $b + e = c + d$. De eerste relatie geeft $b - a = d - c$, de tweede $b - a = e - d$ en de derde $c - b = e - d$. De vier opeenvolgende verschillen tussen de getallen a, b, c, d en e zijn dus steeds hetzelfde, zeg v. We kunnen dus alle elementen van onze verzameling in a en v uitdrukken: $b = a + v$, $c = a + 2v$, $d = a + 3v$ en $e = a + 4v$.

Verder weten we dat $a+c+e$ ook in de rij van 13 bovenstaande uitdrukkingen moet voorkomen. Nu geldt enerzijds $c + e < a + c + e < a + d + e$, terwijl we anderzijds wegens bovenstaande rij van 13 uitkomsten weten dat $d + e$ de enige uitkomst is tussen $c + e$ en $a + d + e$. Dus moet wel gelden dat $a+c+e = d+e$ en dus dat $a+c = d$, oftewel $a+(a+2v) = a+3v$. Dit geeft $a = v$ en we concluderen dat onze verzameling van de vorm $\{a, 2a, 3a, 4a, 5a\}$ is voor zeker positief geheel getal a. Het is omgekeerd duidelijk dat een verzameling van deze vorm ook daadwerkelijk maar tot 13 uitkomsten leidt; de uitkomsten zijn namelijk de a-vouden tussen $3a$ en $15a$.

Onderdeel c) komt dus neer op het vinden van de verzamelingen van deze vorm waarbij één van de getallen 2016 is. Het lukt niet om een gehele a te kiezen zodanig dat $5a = 2016$, maar door a achtereenvolgens zodanig te kiezen dat $4a = 2016$, $3a = 2016$, $2a = 2016$ en $a = 2016$ vinden we de vier verzamelingen $\{504, 1008, 1512, \mathbf{2016}, 2520\}$; $\{672, 1344, \mathbf{2016}, 2688, 3360\}$; $\{1008, \mathbf{2016}, 3024, 4032, 5040\}$; $\{\mathbf{2016}, 4032, 6048, 8064, 10080\}$.