Finaletraining
Wiskunde Olympiade

Birgit van Dalen, Julian Lyczak, Quintijn Puite, Merlijn Staps

Voor het schrijven van dit trainingsmateriaal hebben we inspiratie opgedaan uit materiaal van de Rijksuniversiteit Groningen, opgesteld door Jan Tuitman (juni 2003) en bewerkt door Wout de Goede (mei 2007) en Wim Berkelmans (Vrije Universiteit Amsterdam, augustus 2007), en materiaal van Hans Sterk (Technische Universiteit Eindhoven). We bedanken alle betrokkenen voor het beschikbaar stellen van hun materiaal.

Versie: 21 november 2016
Website: www.wiskundeolympiade.nl

Op de website zijn van alle opgaven uitwerkingen te vinden. We raden je wel aan pas na het zelf proberen van een opgave de uitwerking erbij te pakken; dat is namelijk het meest leerzaam.
Er zijn vaak meerdere oplossingen mogelijk van een opgave. Kijk er dus niet raar van op als de uitwerking op de website verschilt van jouw eigen oplossing.

Inhoudsopgave

1 Rijen, inductie en priemgetallen 1

1 Somformules voor rekenkundige en meetkundige rij 1

2 Inductie 5

3 Priemgetallen 10

4 Gemengde opgaven 13

2 Getaltheorie 17

5 Delers 17

6 Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11 22

7 Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud 27

8 Gemengde opgaven 30

3 Meetkunde 33

9 Hoeken 33

10 Congruentie en gelijkvormigheid 36

11 Driehoeken 41

12 Vierhoeken 45

13 Gemengde opgaven 49

4 Bewijsmethoden 51

14 Bewijs uit het ongerijmde 51

15 Extremenprincipe 54

16 Ladenprincipe 56

17 Gemengde opgaven 58

Katern 1

Rijen, inductie en priemgetallen

1 Somformules voor rekenkundige en meetkundige rij

Iedereen kent de positieve gehele getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Dit heten ook wel de *natuurlijke getallen*. (In sommige boeken wordt ook 0 als een natuurlijk getal gezien, maar hier doen we dat niet.)

Als we daar 0 en de negatieve gehele getallen aan toe voegen, krijgen we de *gehele getallen*:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Wil je 27 minimarsjes eerlijk verdelen over 18 personen, dan zie je na heel even nadenken dat je iedereen er anderhalf kan geven. Je had ook (zonder nadenken) meteen kunnen zeggen: dan krijgt iedereen er $\frac{27}{18}$. Dit is een voorbeeld van een breuk. De *rationale getallen* (of *breuken*) zijn de getallen van de vorm $\frac{t}{n}$ waarbij t een geheel getal is en n een geheel getal dat niet gelijk is aan 0. We noemen t de *teller* en n de *noemer*. Een breuk laat zich op meerdere manieren schrijven. Zo is $\frac{27}{18}$ gelijk aan $\frac{3}{2}$, wat ook wel wordt geschreven als $1\frac{1}{2}$.

Alle getallen van de getallenlijn samen vormen de verzameling van de *reële getallen*. Daartoe behoren 5, -3 en $\frac{27}{18}$, maar ook $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ en π. In katern 4 zullen we bewijzen dat $\sqrt{5}$ echt geen breuk is. Het is dus een reëel getal dat niet een rationaal getal is. Dat wordt wel een irrationaal getal genoemd.

Ten slotte nog wat terminologie. Een uitdrukking van de vorm $a + b$ heet een *som* en is het resultaat van de *optelling* van de *termen* a en b. Een uitdrukking van de vorm $a \cdot b$ (of ab of $a \times b$) heet een *product* en is het resultaat van de *vermenigvuldiging* van de *factoren* a en b.

1.1 Rekenkundige rij

We kunnen ook een hele *rij* getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$ bij elkaar optellen; je krijgt dan de som $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$. De beroemde wiskunde Carl Friedrich Gauss (1777–1855) moest als jongetje van 10 ooit eens de getallen 1 tot en met 100 optellen. Hij wist binnen een paar seconden het antwoord. Hoe deed hij dat zo snel? De som die Gauss moest uitrekenen was

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Schrijf nu dezelfde som nog een keer op onder de oorspronkelijke uitdrukking, maar dan met de termen in omgekeerde volgorde.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

De eerste term van de eerste som opgeteld bij de eerste term van de tweede som is $1+100 = 101$. Tellen we de tweede term van beide sommen op, dan vinden we $2 + 99$ en dat is ook weer 101. En idem voor de derde term: $3 + 98 = 101$. Zo kunnen we alsmaar verder gaan. Er zijn in totaal 100 termen, dus op deze manier komen we op $100 \cdot 101$. Maar omdat we de oorspronkelijke uitdrukking nu in totaal twee keer hebben geteld, moeten we nog delen door 2. We concluderen dat

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 = \tfrac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$

Zo kunnen we ook wel de getallen 1 tot en met 1000 optellen. Nu vinden we, als we de uitdrukking weer in omgekeerde volgorde onder zichzelf opschrijven, als som van twee termen boven elkaar $1 + 1000$, $2 + 999$, $3 + 998$, et cetera, wat telkens 1001 is. Er zijn in totaal 1000 termen, dus de som van de twee uitdrukkingen is $1000 \cdot 1001$, waaruit we concluderen dat

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999 + 1000 = \tfrac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500500.$$

Door de getallen 100 en 1000 in bovenstaande twee voorbeelden te vervangen door de variabele n, krijgen we de algemene formule voor de som van de getallen 1 tot en met n. De som van een term en de term daaronder in de omgekeerde uitdrukking is telkens $n+1$. Er zijn in totaal n termen, dus de som van tweemaal deze uitdrukking is $n \cdot (n + 1)$. Er geldt dus

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + (n - 1) + n = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een *rekenkundige rij*: een rij waarvan de afzonderlijke termen steeds een constante verschillen (in dit geval was dat steeds 1). We bekijken een ingewikkelder voorbeeld: wat is de som van de volgende rekenkundige rij (waarbij n een gegeven natuurlijk getal is)?

$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 4) + (3n + 7)$$

Uit hoeveel termen bestaat de som eigenlijk? Dat hangt natuurlijk van n af. We bekijken even een voorbeeldje. Voor $n = 5$ loopt de rij door tot en met het getal $3n + 7 = 22$, dus de uitdrukking is dan $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$. Dat zijn 7 termen. Hoe zit het voor algemene n? Het verschil tussen de eerste en de laatste term is $(3n+7)-4 = 3n+3$. Maar het verschil tussen twee termen is steeds 3, dus er worden $\frac{3n+3}{3} = n+1$ sprongen gemaakt. Dat betekent dat de som uit $n + 2$ termen bestaat, één meer dan het aantal sprongen. (Merk op dat deze bewering overeen komt met ons voorbeeldje: voor $n = 5$ waren er 7 termen, en inderdaad $n + 2 = 7$.)

Een andere manier om het aantal termen te achterhalen is als volgt: de eerste term is 4, de tweede 7, etc. Omdat er steeds 3 bijkomt is de k-de term dus $3k + 1$; immers $3 \cdot 1 + 1 = 4$; $3 \cdot 2 + 1 = 7$, etc. De hoeveelste term is nou $3n+7$? Uit $3k+1 = 3n+7$ volgt dat $k = n+2$, dus $3n + 7$ is de $(n + 2)$-de term. Het zijn dus $n + 2$ termen.

We kunnen de uitdrukking weer omgekeerd onder zichzelf opschrijven; de som van twee termen onder elkaar is dan telkens $4 + (3n + 7)$, oftewel $3n + 11$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1^{\text{e}} & & 2^{\text{e}} & & & & (n+1)^{\text{ste}} & & (n+2)^{\text{de}} \\
 & & & & & & & & \\
4 & + & 7 & + & \ldots & + & (3n+4) & + & (3n+7) \\
(3n+7) & + & (3n+4) & + & \ldots & + & 7 & + & 4 \\
\hline
(3n+11) & + & (3n+11) & + & \ldots & + & (3n+11) & + & (3n+11)
\end{array}$$

Daar staan onder de streep $n + 2$ termen $(3n + 11)$, dus we concluderen dat

$$4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 4) + (3n + 7) = \tfrac{1}{2}(n + 2)(3n + 11).$$

In het algemeen kun je deze methode toepassen bij het berekenen van de som van een rekenkundige rij $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$ bestaande uit N termen. Je vindt dan dat de som gelijk is aan de helft van het aantal termen maal de som van de eerste en laatste term:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \tfrac{1}{2} \cdot N \cdot (a_1 + a_N).$$

1.2 Meetkundige rij

Voor het uitrekenen van de som $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$ werkt de methode uit de vorige paragraaf niet; het verschil tussen de termen is namelijk niet constant, dus het gaat hier niet om een rekenkundige rij. Toch heeft deze rij termen ook een mooie eigenschap: elke term is steeds 2 keer zo groot als de vorige term. En daaruit volgt dat als je de uitdrukking met 2 vermenigvuldigt, je een andere uitdrukking krijgt die heel erg veel lijkt op de oorspronkelijke som. We noemen de som even S, dus

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}.$$

Dan geldt — als we alles met 2 vermenigvuldigen — dat

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n.$$

Als we deze twee uitdrukkingen nu van elkaar aftrekken, vinden we dat

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
2S & = & & & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & + & 2^n \\
S & = & 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots & + & 2^{n-2} & + & 2^{n-1} & & \\
\hline
2S - S & = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & 0 & + & 2^n
\end{array}$$

Dus $S = 2^n - 1$.

Deze methode werkt in het algemeen als we de som berekenen van een *meetkundige rij*: een rij waarvan de opeenvolgende termen steeds een constante factor $r \neq 1$ van elkaar verschillen. We kunnen de som dan schrijven als $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = b + r \cdot b + r^2 \cdot b + \cdots + r^{N-1} \cdot b$, waarbij N weer het aantal termen is, b de eerste term, en r de constante factor die ook wel de *reden* wordt genoemd. Hierboven was het blijkbaar slim om te kijken naar de waarde van $2S$ zodat alle termen 'een plekje doorschuiven'. We kijken daarom nu naar $r \cdot S$:

$$r \cdot S = r \cdot b + r^2 \cdot b + r^3 \cdot b + \cdots + r^N \cdot b.$$

Als we daar

$$S = b + r \cdot b + r^2 \cdot b + \cdots + r^{N-1} \cdot b$$

van aftrekken, houden we over dat

$$(r - 1)S = r^N \cdot b - b.$$

Dus

$$S = \frac{r^N \cdot b - b}{r - 1} = \frac{a_{N+1} - a_1}{r - 1},$$

waarbij a_{N+1} de eerstvolgende term van de rij is als de rij nog een term meer had gehad.

1.3 Opgaven

Opgave 1. *Geef een directe uitdrukking voor de volgende som in termen van n, waarbij n een gegeven natuurlijk getal is. Controleer steeds je gevonden antwoord door de genoemde som voor $n = 3$ met de hand uit te rekenen.*

(a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$;

(b) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n)$;

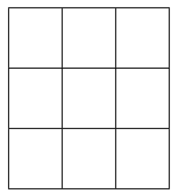
(c) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \cdots + (10n + 1)$.

Opgave 2. *Geef een directe uitdrukking voor de volgende som in termen van n, waarbij n een gegeven natuurlijk getal is.*

(a) $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1}$;

(b) $1 + 10 + 100 + \cdots + 10^n$.

Opgave 3. *Van de negen vakjes van een 3×3-bord kunnen we op verschillende manieren rechthoeken vormen. Allereerst zijn er de negen 1×1-vierkantjes, de vier 2×2-vierkantjes en het 3×3-vierkant zelf. Daarnaast zijn er nog de volgende rechthoeken te maken: zes 1×2 en zes 2×1; drie 1×3 en drie 3×1; twee 2×3 en twee 3×2. Dat zijn er in totaal 36.*
Hoeveel rechthoeken bevat een 8×8-bord?



Opgave 4 (Finale 2013)**.** *Het getal S is de uitkomst van de volgende som:*

$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \cdots + 10^{2013}.$$

Als het getal S wordt uitgeschreven, hoe vaak komt het cijfer '5' dan voor in het resultaat?

2 Inductie

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

We gaan nu op een alternatieve manier bewijzen dat deze bewering geldt.

Voor $n = 5$ staat hier dat $1+2+4+8+16 = 32-1$ en voor $n = 6$ dat $1+2+4+8+16+32 = 64-1$, en dat klopt allebei. Hadden we deze laatste gelijkheid nou ook kunnen afleiden uit de eerste? Jazeker, ga maar eens uit van $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1$ en tel hier aan beide kanten 32 bij op, dan krijg je $(1+2+4+8+16)+32 = 32+32-1 = 64-1$ en dat is precies de uitdrukking voor $n = 6$. En als we bij deze gelijkheid aan beide kanten 64 optellen, komen we uit op de bewering voor $n = 7$ (weer eentje hoger): $1+2+4+8+16+32+64 = 64+64-1 = 128-1$.

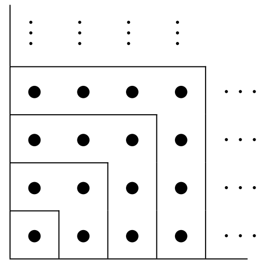
Wat gebeurt hier nu precies? Laten we de $n = 5$ uit bovenstaand voorbeeld even $n = k$ noemen, waarbij k een willekeurig natuurlijk getal is. Stel dat je al weet dat $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Dan mogen we daar aan beide kanten 2^k bij optellen en krijgen we $\left(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1}\right) + 2^k = 2^k + 2^k - 1$. Maar $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, dus hier staat nu $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$. En dat is precies de bewering voor n 'eentje hoger', oftewel, voor $n = k + 1$. We hebben in de voorgaande zinnen dus bewezen dat *als* de gelijkheid geldt voor $n = k$, hij dan ook geldt voor $n = k + 1$. Kortom, *als* hij geldt voor $n = 1$, dan ook voor $n = 2$, en dan automatisch ook voor $n = 3$, en dan ook voor $n = 4$, etc. We hoeven dus nog maar één ding te laten zien: dat hij ook daadwerkelijk geldt voor $n = 1$. Maar dat is in dit geval simpel: vul maar in $n = 1$ en kijk of het klopt. Voor $n = 1$ loopt de rij links door tot $2^0 = 1$, dus de eerste term is tevens de laatste term en de som daarvan is 1. Aan de rechterkant staat er $2^n - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Aan beide kanten van het =-teken komt er dus hetzelfde uit. Dus voor $n = 1$ klopt de bewering in ieder geval, en daarmee ook voor alle grotere n.

Deze uitwerking is een voorbeeld van een inductief bewijs. Als we een gelijkheid bewijzen voor $n = 1$ en als we er bovendien in slagen om uit de gelijkheid voor $n = k$ diezelfde gelijkheid voor $n = k + 1$ af te leiden, dan moet het wel zo zijn dat de gelijkheid voor alle n geldt. Deze redenering heet met een deftig woord: *volledige inductie* of *inductie* naar n. De tijdelijke aanname dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ (om daaruit af te leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$) heet de *inductiehypothese* en wordt soms genoteerd als IH.

Je zou dit kunnen vergelijken met een rij dominosteentjes. Als je steentje 1 omver duwt, valt steentje 2 ook om. En daarom ook steentje 3. En daarom ook steentje 4. De bouwers hebben ervoor gezorgd dat als een willekeurig steentje omvalt, hij de volgende ook omver duwt. Dat is dus de stap van $n = k$ naar $n = k + 1$, zeg maar de doorgeefstap. Om het geheel in beweging te zetten hoeven we alleen nog maar een duwtje tegen dominosteen $n = 1$ te geven, dan valt wegens de doorgeefstap ook steentje $n = 2$, dus wegens de volgende doorgeefstap ook steentje $n = 3$, et cetera. In de wiskunde noemen we de doorgeefstap normaliter de *inductiestap*; het eerste zetje heet juist de *inductiebasis*. Dat eerste zetje hoeft trouwens niet $n = 1$ te zijn, maar kan bijvoorbeeld ook $n = 0$ zijn of $n = 4$ (zoals in voorbeeld 2).

In het bewijs hierboven werkte het om er links en rechts 2^k bij op te tellen. Maar soms moet je hele andere dingen doen om uit de veronderstelling dat de gelijkheid geldt voor $n = k$ af te kunnen leiden dat hij ook geldt voor $n = k + 1$. Het zou ook kunnen dat je er links en rechts juist iets moet afhalen, of dat je links en rechts alles met factor 10 moet vermenigvuldigen, of dat je links en rechts het kwadraat moet nemen, of ....

Vaak kun je door inductie een intuïtief idee hard maken. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar opgave 1(a). Voor $n = 3$ staat daar $1 + 3 + 5 = 3^2$ en dat zouden we ons kunnen voorstellen als 1 en 3 en 5 knikkers die samen in een 3×3-vierkant liggen. Het is 'logisch' dat als we nu 7 knikkers toevoegen, we een 4×4-vierkant verkrijgen. En zo alsmaar verder. Om dit laatste zinnetje 'en zo alsmaar verder' wiskundig te verantwoorden, gebruiken we inductie. Zie het volgende voorbeeld.



Voorbeeld 1. *Bewijs met inductie dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Oplossing. We gaan deze opgave dus nu met inductie doen.
(Inductiebasis) We kijken eerst maar eens of het voor $n = 1$ geldt. Dan staat er links de som van 1 tot en met 1 en daarmee wordt dus alleen het getal 1 bedoeld. Rechts staat dan 1^2 en dat is ook 1. Dus dan geldt de gelijkheid. We zouden het nu ook even voor een paar andere waarden kunnen uitrekenen en vergelijken, maar voor ons bewijs met inductie hebben we aan één duwtje genoeg.
(Inductiestap) Stel dat het voor zekere $n = k \geqslant 1$ geldt, dus stel dat $1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$. Hoe kunnen we dit gebruiken als we willen bewijzen dat het ook voor $n = k + 1$ geldt, oftewel dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$? Aan de linkerkant is er dan een term $(2k + 1)$ bijgekomen dus laten we dat rechts ook maar doen. Dan volgt uit $1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2$ dat $\big(1+3+5+\cdots+(2k-1)\big)+(2k+1) = k^2+(2k+1)$. Maar dat laatste is op zijn beurt weer $(k + 1)^2$. We concluderen dat dan dus blijkbaar geldt dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$, precies wat we wilden bewijzen. Met inductie concluderen we dat de gelijkheid voor alle natuurlijke getallen geldt. $\square$

Merk op dat het heel belangrijk is om met woorden de structuur van je bewijs goed weer te geven. Er is allereerst een bewering die bewezen moet worden; meestal is deze al gegeven in de opgave. Bij de inductiebasis reken je de linkerkant en de rechterkant apart uit en kijk je of er hetzelfde uitkomt; zo ja, dan heb je de inductiebasis bewezen. Bij de inductiestap schrijf je verolgens de inductiehypothese op en zeg je erbij dat je daar nu vanuit mag gaan. Daarnaast is het nuttig om alvast de te bewijzen bewering voor $n = k + 1$ uit te schrijven, zodat je weet wat je doel is. Zet daar wel heel duidelijk bij dat die bewering dus juist "te bewijzen" is. Vaak krijg je dan wel het idee hoe je van de uitdrukking voor $n = k$ op die voor $n = k + 1$ kan komen. Bedenk goed wat de ophoging van n betekent: in geval van de som van een rij komt dat neer op de volgende term erbij optellen (zoals in bovenstaand voorbeeld). Maar in geval van $n!$ betekent n ophogen van $n = k$ naar $n = k + 1$ dat je de uitdrukking juist vermenigvuldigt met $k + 1$.

Het kan ook voorkomen dat je eerst nog zelf de bewering goed rond moet krijgen. Bijvoorbeeld als de vraag was geweest: bereken voor gegeven natuurlijk getal n een directe uitdrukking voor de rij $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$. Als je de methode van Gauss nog niet had gekend, had je als volgt te werk kunnen gaan. Je rekent de som van de rij uit voor de eerste paar kleine waarden van n, bijvoorbeeld $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Je ziet dat er achtereenvolgens $1, 4, 9, 16, 25$ uitkomt. Daardoor kun je het vermoeden krijgen dat altijd wel zal gelden dat $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Dat kun je dan vervolgens met inductie bewijzen, zoals we in bovenstaand voorbeeld hebben gedaan.

De voorbeelden hierboven zijn gelijkheden: beweringen van de vorm 'iets is gelijk aan iets anders'. Maar met inductie kun je ook andere beweringen bewijzen dan alleen maar gelijkheden. Bijvoorbeeld: 'iets is kleiner dan iets anders'; 'iets is deelbaar door iets anders', et cetera. Hier twee voorbeelden.

Voorbeeld 2. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 4$ geldt dat $2^n + 5 > 5n$.*

Oplossing. Een tabel komt al erg overtuigend over; de linkerkant groeit nou eenmaal veel harder (exponentieel) dan de rechterkant (lineair). Toch moeten we het wiskundig nog netjes bewijzen. We doen dat met inductie naar n. Omdat we het pas hoeven te bewijzen vanaf $n = 4$ beginnen we daar.
(Inductiebasis) Voor $n = 4$ geldt $2^n + 5 = 21$ en $5 \cdot n = 20$, dus dan klopt het.
(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geqslant 4$. Er geldt dan dus sowieso dat $2^k + 5 > 5k$. Bovendien geldt er, wegens $k \geqslant 4$, dat $2^k \geqslant 2^4 = 16 > 5$. Als we dat nou combineren vinden we dat

$$2^{k+1} + 5 = 2 \cdot 2^k + 5 = (2^k + 5) + 2^k > 5k + 2^k > 5k + 5 = 5(k + 1).$$

Maar daar staat precies onze bewering voor $n = k+1$. We concluderen dat de ongelijkheid voor alle natuurlijke getallen n vanaf de 4 geldt. $\square$

Voorbeeld 3. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1}$ deelbaar is door 11 (dat wil zeggen: een 11-voud is).*

Oplossing. We bewijzen dit met inductie.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ komt er $3^{3n+1} + 7 \cdot 5^{n-1} = 3^4 + 7 \cdot 5^0 = 88$ uit, en dat is inderdaad deelbaar door 11.
(Inductiestap) De inductiehypothese luidt: stel $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1}$ is een 11-voud. Dan kun je dat dus schrijven als $11 \cdot c$ voor zekere gehele c, dus $3^{3k+1} + 7 \cdot 5^{k-1} = 11c$. Wat betekent dit nu voor de volgende waarde? Voor $n = k + 1$ komt er te staan $3^{3(k+1)+1} + 7 \cdot 5^{(k+1)-1}$ en dat is wegens de regels voor de machten hetzelfde als

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot 7 \cdot 5^{k-1}.$$

Wegens de inductiehypothese geldt $7 \cdot 5^{k-1} = 11c - 3^{3k+1}$ en als we dat hierin invullen krijgen we

$$27 \cdot 3^{3k+1} + 5 \cdot (11c - 3^{3k+1}) = 22 \cdot 3^{3k+1} + 55c = 11 \cdot (2 \cdot 3^{3k+1} + 5c)$$

en dat is duidelijk een 11-voud.

Omdat de bewering bovendien geldt voor $n = 1$, geldt hij wegens inductie dus voor alle natuurlijke getallen n. $\square$

Een tip bij de opgaven: werk niet meer haakjes uit dan strikt noodzakelijk, maar werk liefst zoveel mogelijk met gemeenschappelijke factoren. Als je bijvoorbeeld in je berekening stuit op $n(n + 5) + 3(n + 5)$ zou je de haakjes kunnen gaan uitwerken, maar het is vaak veel gemakkelijker om de gemeenschappelijk factor $(n + 5)$ buiten haakjes te halen en dit te herschrijven tot $(n+3)(n+5)$. Dat kan aanzienlijk schelen in het rekenwerk, dus we geven het graag als tip bij de volgende opgaven mee.

Bij de eerste opgaven staat nog expliciet erbij dat je ze "met inductie" moet bewijzen. Maar bij de latere opgaven bepaal jij bij het eraan werken wel of je het met inductie gaat doen of niet. In dit hoofdstuk is de tip natuurlijk om het wel met inductie te proberen, maar bij geen enkele finale-opgave zul je worden verplicht om het per se met inductie aan te pakken. Als je het wel met inductie doet, vermeld dat dan en splits je uitwerking op in een inductiebasis en een inductiestap.

2.1 Opgaven

Opgave 5. *Bij opgave 2(a) heb je gezien dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{n-1} = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

Bewijs deze bewering nogmaals, maar ditmaal met inductie.

Opgave 6. *Aan een schaaktoernooi doen $n \geqslant 2$ spelers mee. Elke twee spelers spelen precies één keer tegen elkaar. Bewijs met inductie dat er in totaal $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ wedstrijden gespeeld worden.*

Opgave 7. *Bewijs dat $2 \cdot 3^n > 7n + 3$ voor alle gehele getallen $n \geqslant 2$.*

Opgave 8. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \cdots + n \cdot (n + 3) = \tfrac{1}{3}n(n + 1)(n + 5).$$

Opgave 9. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat $7^n + 3^{n+1}$ deelbaar is door 4.*

Opgave 10. *Voor een rij natuurlijke getallen a_1, a_2, a_3, ... geldt*

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2$,
- $a_{n+2} = a_n^2 + 2a_{n+1}$ *voor* $n \geqslant 1$.

Bewijs dat a_{2n+1} oneven is voor alle gehele getallen $n \geqslant 0$.

Opgave 11. *Een aantal steden is verbonden door éénrichtingsverkeerwegen. Tussen elk tweetal steden loopt een directe weg (de ene kant op of de andere kant op). Bewijs dat er een stad is die te bereiken is vanuit alle andere steden (eventueel via andere steden).*

Opgave 12. *Voor een rij reële getallen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geldt $x_1 > \frac{1}{2}$ en*

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n - \tfrac{1}{4}}.$$

Bewijs dat voor alle natuurlijke n geldt $x_n > \frac{1}{2}$.

3 Priemgetallen

De *delers* van een geheel getal, bijvoorbeeld 50, zijn de gehele getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel getal uitkomt. Dus de delers van 50 zijn $1, 2, 5, 10, 25, 50$ en ook $-1, -2, -5, -10, -25, -50$. In dit hoofdstuk bekijken we alleen positieve delers. Sommige natuurlijke getallen hebben heel veel delers, sommige maar heel weinig. Hier een tabel van de eerste tien natuurlijke getallen en al hun positieve delers:

n	de positieve delers van n	
1	1	—
2	1, 2	priem
3	1, 3	priem
4	1, 2, 4	samengesteld
5	1, 5	priem
6	1, 2, 3, 6	samengesteld
7	1, 7	priem
8	1, 2, 4, 8	samengesteld
9	1, 3, 9	samengesteld
10	1, 2, 5, 10	samengesteld

Alle natuurlijke getallen zijn in ieder geval deelbaar door 1 en door zichzelf. De natuurlijke getallen groter dan 1 die als positieve delers *alleen* 1 en zichzelf hebben, heten *priemgetallen.* Een natuurlijk getal dat nog meer positieve delers heeft (dan 1 en zichzelf), heet *samengesteld.* Volgens afspraak valt 1 buiten de boot; hij is noch priem noch samengesteld.

In termen van delers kunnen we dus zeggen dat de priemgetallen precies de natuurlijke getallen zijn met exact twee positieve delers, en dat de samengestelde getallen precies de natuurlijke getallen zijn met meer dan twee positieve delers. Het getal 1 is het enige natuurlijke getal met maar één positieve deler.

Voorbeeld 4. *Ga na voor welke natuurlijke getallen n het getal $4^n - 1$ priem is.*

Oplossing. Voor een gegeven natuurlijk getal n kunnen we $4^n - 1$ ontbinden in factoren: $4^n - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1)$. We zouden nu wellicht in de verleiding kunnen komen om te zeggen dat $4^n - 1$ altijd samengesteld is. Toch zit hier een addertje onder het gras: een van de factoren zou 1 kunnen zijn. En laat dat nou net bij $n = 1$ het geval zijn. De conclusie luidt dat $4^n - 1$ voor alle gehele getallen $n \geqslant 2$ een samengesteld getal is, maar voor $n = 1$ priem. $\square$

Elk natuurlijk getal groter dan 1 is op een unieke manier te schrijven als product van priemgetallen[1]. Dat noemen we de *priemontbinding* van n. (Daarbij beschouwen we verschillende volgordes van dezelfde priemfactoren als hetzelfde: $6 = 2 \cdot 3$ en $6 = 3 \cdot 2$ stellen dezelfde priemontbinding voor van 6 en dit is dus de unieke priemontbinding van 6.) Zo is bijvoorbeeld $4200 = 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Het zal vaak handig blijken om ook het getal 1 een unieke priemontbinding te geven, namelijk het product van nul priemgetallen (het lege product).

Als een natuurlijk getal een 3-voud is, weten we dat het van de vorm $3k$ is voor zekere gehele k en dat het dus de priemfactor 3 moet bevatten (ten minste één maal). Omgekeerd zijn natuurlijk alle getallen die priemfactor 3 bevatten een 3-voud. De positieve 3-vouden zijn dus *precies* de natuurlijke getallen waarbij priemfactor 3 in hun priemontbinding voorkomt. Een zelfde redenering leidt — wegens $50 = 2 \cdot 5^2$ — tot de constatering dat de positieve 50-vouden precies de natuurlijke getallen zijn die priemfactor 2 bevatten (ten minste één keer) en die priemfactor 5 (ten minste) 2 keer bevatten. Op zo'n manier kun je ook naar 6-vouden, 8-vouden, 30-vouden, ... kijken.

Bij de vraag of een bewering al dan niet geldt, kun je het óf proberen te bewijzen, óf door middel van een tegenvoorbeeldje laten zien dat het niet zo is. Hoe werkt dat, een *tegenvoorbeeldje*? Iemand beweert bijvoorbeeld dat alle veelvouden van 15 ook deelbaar zijn door 6. Jij vindt van niet en overtuigt hem met een tegenvoorbeeld: "Kijk maar naar het getal 45, dat is wel een veelvoud van 15 (namelijk $3 \cdot 15$) maar het zit niet in de tafel van 6 ($45 = 7\frac{1}{2} \cdot 6$)." Bij tegenvoorbeelden gaat het erom om er één te vinden waarvoor de bewering niet klopt. Hier is dat dus het geval met 45, maar je had ook 15 zelf of 75 ofzo kunnen kiezen. Maar je had niet 60 kunnen kiezen; dat is namelijk toevallig een getal waarvoor de bewering wel klopt: het is een veelvoud van 15 en (toevallig) ook een veelvoud van 6.

We hebben in het begin van dit hoofdstuk gekeken naar de positieve delers van de getallen 1 tot en met 10. Als voorbeeld kijken we nog een keer naar de positieve delers van 50. Dat zijn precies de natuurlijke getallen waar 50 deelbaar door is, zodat je weer op een geheel

[1] Dit heet formeel de Hoofdstelling van de Rekenkunde. Het voert te ver om deze stelling hier te bewijzen.

getal uitkomt. Dus de positieve delers van 50 zijn $1, 2, 5, 10, 25, 50$. Maar hebben deze delers nog iets met de priemfactorontbinding van 50 (als $2^1 \cdot 5^2$) te maken?

Laten we eens kijken naar zo'n positieve deler van 50, zeg d. Omdat het een deler is, moet er dus een natuurlijk getal k zijn (in feite ook weer een deler) zodat $d \cdot k = 50$. Als we nu van d de priemfactorontbinding weten, zijn we al een eind op weg met het opschrijven van de priemfactorontbinding van 50. Immers, alle priemfactoren van d zitten ook in 50. Zo'n deler moet dus wel van de vorm $2^x \cdot 5^y$ zijn, waarbij x gelijk aan 0 of 1 is en waarbij y gelijk aan 0, 1 of 2 mag zijn. (Daarbij correspondeert de deler 1 met de schrijfwijze $2^0 \cdot 5^0$.) Omgekeerd is elk getal van deze vorm overduidelijk ook een deler van 50. Dus alle positieve delers van 50 zijn precies alle getallen van deze vorm! Voor x zijn er daarbij 2 opties en voor y zijn er 3 opties. Het is dus best logisch dat het getal 50 precies $2 \times 3 = 6$ positieve delers heeft.

3.1 Opgaven

Opgave 13. *(a) We weten: als een geheel getal deelbaar is door 6, dan is het deelbaar door 2 en door 3. Geldt dit ook andersom?*

(b) We weten: als een geheel getal deelbaar is door 8, dan is het deelbaar door 2 en door 4. Geldt dit ook andersom?

(c) We weten: als een geheel getal deelbaar is door 30, dan is het deelbaar door 6 en door 15. Geldt dit ook andersom?

Opgave 14. *Er zijn 25 priemgetallen onder de 100. Vind ze door in onderstaande tabel eerst alle veelvouden van 2 weg te strepen (behalve 2 zelf natuurlijk), dan alle veelvouden van 3 die er nog staan ook weg te strepen, enzovoorts.*

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Opgave 15. *(a) Laat van de volgende getallen zonder rekenmachine zien dat het geen priemgetallen zijn:* 2008*;* 12345678*;* 12345*;* 489489*;* $137^2 - 135^2$.

(b) Hoeveel even priemgetallen zijn er? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door 17*? Hoeveel priemgetallen zijn er deelbaar door* 25*?*

Opgave 16. *Veronderstel dat* $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$.

(a) Geef de priemfactorontbinding van $10n$.

(b) Geef de priemfactorontbinding van $15!n$ *(*$15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*).*

(c) Geef de priemfactorontbinding van n^2.

(d) Geef de priemfactorontbinding van $(7n)^8$.

Opgave 17. *(a) Vind alle priemgetallen* p *waarvoor* $p+1$ *ook een priemgetal is.*

(b) Vind alle priemgetallen p *waarvoor* $p+2$ *en* $p+4$ *ook priemgetallen zijn.*

Opgave 18. *Bewijs dat* $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ *voor alle natuurlijke getallen* n *een geheel getal is.*

Opgave 19 (Finale 2007)**.** *Bepaal het aantal gehele getallen* a *met* $1 \leqslant a \leqslant 100$ *zodat* a^a *het kwadraat van een geheel getal is. (Beredeneer dat je ze allemaal hebt geteld.)*

Opgave 20. *Welk getal heeft meer positieve delers:* 6^9 *of* 97^{97}*?*

Opgave 21. *Veronderstel dat* $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f$. *Hoeveel positieve delers heeft* n*?*

Opgave 22. *Bewijs dat voor elk natuurlijk getal* n *geldt dat* n^2 *een oneven aantal positieve delers heeft.*

Opgave 23. *Ga na voor welke paren natuurlijke getallen* (m, n) *het getal* $m^2 - n^2$ *priem is.*

Opgave 24 (Finale 2008)**.** *Bepaal alle paren positieve gehele getallen* (m, n) *waarvoor geldt*

$$3 \cdot 2^n + 1 = m^2.$$

Opgave 25. *Bekijk de eerste 7 waarden van de functie* $f(n) = 41 + n(1+n)$ *(dus vul in* $n = 1, \ldots, 7$*). Ga na dat er steeds een priemgetal uit komt. Hoe zit dat vanaf* $n = 8$*? Kun je concluderen dat er voor alle natuurlijke getallen* n *een priemgetal uit komt?*

4 Gemengde opgaven

Opgave 26 (Finale 2009)**.** *We bekijken de rij getallen 0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, ... die we maken door met 0 te beginnen, dan 1 erbij op te tellen en nog een keer 1 erbij op te tellen, dan 2 erbij op te tellen en nog een keer 2 erbij op te tellen, dan 3 erbij op te tellen en nog een keer 3 erbij op te tellen, enzovoorts. Als we de termen van deze rij* a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ... *noemen, dan geldt dus* $a_0 = 0$ *en*

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + n, \qquad a_{2n} = a_{2n-1} + n$$

voor alle gehele getallen $n \geqslant 1$.
Vind alle gehele getallen $k \geqslant 0$ *waarvoor* a_k *het kwadraat van een geheel getal is.*

Opgave 27. *Laat p en q priemgetallen zijn met $p > 3$ en $q = p + 2$. Bewijs dat $p + q$ deelbaar is door 12.*

Opgave 28. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat*

$$0 \cdot n + 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 0 = \tfrac{1}{6}(n+1)n(n-1).$$

Opgave 29 (Finale 2005)**.** *Voor vijf verschillende reële getallen a_1, a_2, a_3, a_4 en a_5 kijken we naar de waarden die de som $a_i + a_j$ kan aannemen wanneer i en j variëren over $1 \leqslant i < j \leqslant 5$. Het aantal verschillende waarden dat de som $a_i + a_j$ kan aannemen noemen we m. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van m.*

Opgave 30 (Finale 2007)**.** *Bestaat er een getal van de vorm $444 \cdots 4443$ (allemaal 4'en en op het eind een 3) dat deelbaar is door 13? Zo ja, geef dan een getal van die vorm dat deelbaar is door 13; zo nee, bewijs dan dat er niet zo'n getal is.*

Opgave 31. *Bewijs dat er 100 opeenvolgende natuurlijke getallen zijn die allemaal samengesteld zijn.*

Opgave 32 (Finale 2010)**.** *Een getal heet een* reekssom *als het geschreven kan worden als $m+(m+1)+\cdots+(n-1)+n$, voor positieve gehele getallen $m < n$. Zo is 18 een reekssom, want $18 = 5 + 6 + 7$. Een getal heet een* tweemacht *als het geschreven kan worden als 2^k met $k \geqslant 0$ een geheel getal.*

(a) Laat zien dat geen enkel positief geheel getal zowel een reekssom als een tweemacht is.

(b) Laat zien dat elk positief geheel getal een reekssom of een tweemacht is.

Opgave 33 (Finale 1971)**.** *Voor ieder natuurlijk getal m definiëren we $a(m)$ als het aantal priemfactoren 2 in zijn priemontbinding. Voor positieve gehele n definiëren we $S(n)$ door:*

$$S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(2^n).$$

Druk $S(n)$ uit in n.

Opgave 34 (Finale 1986)**.** *Bewijs dat voor alle positieve gehele getallen n geldt dat*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Opgave 35 (Finale 2011)**.** *De telduivel heeft alle gehele getallen gekleurd: elk getal is nu óf zwart óf wit. Het getal 1 is wit. Voor elk tweetal witte getallen a en b (de getallen a en b mogen hetzelfde zijn) hebben $a - b$ en $a + b$ verschillende kleuren. Bewijs dat het getal 2011 wit is.*

Opgave 36 (Finale 1984)**.** *Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ wordt a_n gedefiniëerd door:*

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$

Bewijs dat voor elke n geldt dat

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

Katern 2

Getaltheorie

5 Delers

In katern 1 heb je geleerd wat een *deler* van een getal is. Zo zijn bijvoorbeeld 1, 2, 5, 10, 25, 50, -1, -2, -5, -10, -25 en -50 de delers van het getal 50: precies de gehele getallen waar 50 deelbaar door is (dat wil zeggen: zodat er een geheel getal uitkomt). Kortom: het getal n is deelbaar door het gehele getal a precies dan als er een geheel getal b is zo dat geldt $ab = n$. In dat geval is b trouwens ook een deler van n.

Het getal n hoeft niet per se positief te zijn. We kunnen hetzelfde zeggen voor een negatief geheel getal n en zelfs voor $n = 0$. De delers van -9 zijn dus de gehele getallen 1, 3, 9, -1, -3 en -9, wat precies ook de delers van 9 zijn.

Hoe zit dat nu met $n = 0$? De delers van 0 zijn precies de gehele getallen a waarvoor er een b is met $ab = 0$. Maar dit is waar voor alle gehele getallen a: neem maar $b = 0$. De delers van 0 zijn dus alle gehele getallen. Maar we spreken liever af dat 0 zelf geen deler is van 0. Je weet immers niet wat de uitkomst is van $\frac{0}{0}$.

We zetten nog even wat voorbeelden op een rijtje:

$$\begin{array}{ll} 4 \text{ is een deler van } 12 & \text{want } 4 \cdot 3 = 12, \\ -11 \text{ is een deler van } 33 & \text{want } (-11) \cdot (-3) = 33, \\ 6 \text{ is een deler van } -6 & \text{want } 6 \cdot (-1) = -6, \\ 13 \text{ is een deler van } 0 & \text{want } 13 \cdot 0 = 0. \end{array}$$

De *priemdelers* of *priemfactoren* van een natuurlijk getal n zijn die delers die ook een priemgetal zijn. Zo zijn 2 en 5 bijvoorbeeld de priemdelers van 50. Deze priemdelers kom je ook weer tegen in de priemfactorisatie. In katern 1 hadden we gezien dat elk getal een unieke priemontbinding heeft. De priemontbinding van bijvoorbeeld 50 is $50 = 2^1 \cdot 5^2$. Daarin komt de priemdeler 5 twee keer voor (en de priemdeler 2 één keer).

Stel dat a een deler is van n, dus $n = ab$ voor zekere gehele b (en $a \neq 0$). Kunnen we nu een veelvoud van n, zeg kn, ook delen door a? Anders gezegd: is a ook een deler van kn? Ja, want er geldt $kn = kab = (kb)a$, dus als we kn delen door a, dan krijgen we kb als uitkomst en dat is weer geheel.

Rekenregel 1. *Als a een deler is van n, dan is a een deler van kn.*

Stel nu dat a een positieve deler is van kn. Is dan a ook een deler van n en van k? Of misschien van één van beide? Het antwoord op deze vragen hangt er vanaf of a een priemgetal is of niet. Neem als voorbeeld even $a = 6$. Dat is geen priemgetal, want $6 = 2 \cdot 3$. Als we $k = 4$ en $n = 15$ hebben, dan is $kn = 60$ en dat is deelbaar door 6. Maar 6 is geen deler van 4 en ook niet van 15. Dat komt omdat we 6 kunnen splitsen: de priemfactor 2 van 6 zit in 4, maar niet in 15; en de priemfactor 3 van 6 zit niet in 4, maar juist wel in 15. Daardoor komt het dat 4 en 15 niet deelbaar zijn door 6, maar hun product wel.

Als a een priemgetal is, dan kunnen we a niet splitsen zoals we hierboven met 6 deden. In dat geval moet a een deler zijn van n of van k of zelfs van allebei. Dit kunnen we bewijzen met behulp van priemontbindingen. Bekijk namelijk de priemontbinding van n en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen $p_1, p_2, \ldots, p_t$. Bekijk ook de priemontbinding van k en noem de priemgetallen die daarin minstens één keer voorkomen $q_1, q_2, \ldots, q_r$. De priemfactoren die dan in kn voorkomen zijn $p_1, p_2, \ldots, p_t, q_1, q_2, \ldots, q_r$, waarbij er misschien nog dubbele voorkomen als een p'tje gelijk is aan een q'tje. In elk geval kan een priemgetal dat niet tussen de p'tjes en q'tjes zit, ook niet voorkomen in de priemontbinding van kn. Als a nu een priemgetal is dat een deler is van kn, dan moet a voorkomen in de priemontbinding van kn. Dus a is gelijk aan één van de p'tjes of q'tjes. Als $a = p_i$ voor een of andere i, dan is a een deler van n. En als $a = q_j$ voor een of andere j, dan is a een deler van k. Dus a is een deler van minstens één van k en n. We formuleren dit als een rekenregel.

Rekenregel 2. *Als a een priemdeler is van kn, dan is a een deler van k of van n.*

Voorbeeld 5. *Laat p een priemgetal zijn. Vind alle natuurlijke getallen a waarvoor p een deler is van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.*

Oplossing. Als $a \geqslant p$, dan komt p voor in het product $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Dus dan is p zeker een deler van dat product. Wat gebeurt er als $a < p$? Dan kan dat product nog steeds wel erg groot zijn, groter dan p. Toch kan p er geen deler van zijn. Om dit te laten zien, gebruiken we rekenregel 2. Stel namelijk dat p wel een deler is van het product. Dan is p een deler van minstens één van de a factoren, zeg van de factor b. Alle factoren die voorkomen in het product, zijn kleiner dan of gelijk aan a, dus ook $b \leqslant a$. Verder hadden we aangenomen $a < p$, dus $b < p$. Maar dan kan p natuurlijk geen deler zijn van b: de positieve getallen waar p een deler van is, zijn p, $2p$, $3p$, enzovoorts, maar geen getallen kleiner dan p. Kortom, dit kan niet. Dus p is geen deler van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ als $a < p$.

We concluderen dat de gezochte natuurlijke getallen a precies de natuurlijke getallen met $a \geqslant p$ zijn. $\square$

De redenering hierboven gaat niet op als p geen priemgetal is. Dan mogen we rekenregel 2 namelijk niet toepassen. Onze conclusie is dan ook verkeerd, zoals we met een tegenvoorbeeld kunnen laten zien. Neem bijvoorbeeld $p = 6$ (geen priemgetal). Als het bovenstaande voorbeeld ook waar zou zijn voor niet-priemgetallen, dan zou het product alleen deelbaar zijn door 6 als $a \geqslant 6$. Als we echter $a = 4$, kiezen, dan is het product $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ en dat is toch deelbaar door 6. Dus als p niet priem is, dan kan ook voor getallen a die kleiner zijn dan p, gelden dat p een deler is van $a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Zoals we hierboven al zagen geldt rekenregel 2 niet als a geen priemgetal is. Als bijvoorbeeld $a = 4$ een deler is van een product kn, kunnen we niet concluderen dat k of n deelbaar moet zijn door 4. Het zou immers kunnen dat zowel k als n precies één priemfactor 2 bevat. In het speciale geval dat $k = 2$ kunnen we in ieder geval wel concluderen dat n deelbaar moet zijn door 2. Anders bevat kn immers maar één priemfactor 2 en is het niet deelbaar door 4. We zien dus dat als $2n$ deelbaar is door 4, dat dan n deelbaar moet zijn door 2. Dit is een speciaal geval van onderstaande rekenregel (namelijk het geval $a = b = 2$):

Rekenregel 3. *Als ab een deler is van ac, dan is b een deler van c.*

Het bewijs is eenvoudig: als ab een deler is van ac, dan is $ab \neq 0$ (dus $a \neq 0$ en $b \neq 0$) en is er een geheel getal d zodat $d \cdot ab = ac$. Omdat a ongelijk aan nul is, mogen we a links en rechts wegdelen. Dus geldt $d \cdot b = c$ en dat betekent (aangezien $b \neq 0$) precies weer dat b een deler is van c.

Laten we eens kijken wat er gebeurt als we twee getallen optellen. Stel dat we bijvoorbeeld twee even getallen optellen. Dan komt daar weer een even getal uit. Als we een even en een oneven getal bij elkaar optellen, dan komt er juist een oneven getal uit. Een even getal is natuurlijk niets anders dan een getal dat deelbaar is door 2; een oneven getal is juist niet deelbaar door 2. Kunnen we 2 nu vervangen door een willekeurig getal? Stel dat we twee getallen optellen die allebei deelbaar zijn door a. Is het resultaat dan deelbaar door a? En wat als we een getal dat deelbaar is door a optellen bij een getal dat niet deelbaar is door a?

Eerst maar eens twee getallen die deelbaar zijn door a, zeg ak en al. Als we die optellen, krijgen we $ak + al = a(k + l)$ en dat is weer deelbaar door a. Natuurlijk geldt hetzelfde als we het ene getal van het andere aftrekken: $ak - al = a(k - l)$. Dat is ook weer deelbaar door a.

Stel nu dat we ak optellen bij een getal n dat niet deelbaar is door a. Noem de uitkomst l. Dan geldt $l - ak = n$. Dus als l deelbaar is door a, dan is (volgens wat we net hebben bewezen) n ook deelbaar door a. Maar we hadden juist gezegd dat n niet deelbaar was door a. Conclusie: l is ook niet deelbaar door a. Hetzelfde geldt als we ak juist aftrekken van een getal n dat niet deelbaar is door a: dan is de uitkomst ook niet deelbaar door a.

Dit alles vatten we samen in de volgende rekenregel:

Rekenregel 4. *Als a een deler is van m en van n, dan is a een deler van $m + n$ en ook van $m - n$. Als a wel een deler is van m, maar niet van n, dan is a geen deler van $m + n$ en ook niet van $m - n$.*
We kunnen dit ook als volgt samenvatten. Stel a is een deler van m. Dan is a een deler van n precies dan als a een deler is van $m + n$. En a is een deler van n precies dan als a een deler is van $m - n$.

Voorbeeld 6. *Bewijs dat er geen priemgetallen p, q en r bestaan zodat $p^2 + q^2 = r^2$.*

Oplossing. We gaan eerst eens even wat priemgetallen invullen om te kijken wat er gebeurt. We maken een tabel van de waarden van $p^2 + q^2$ voor verschillende priemgetallen p en q:

	$q = 2$	$q = 3$	$q = 5$	$q = 7$
$p = 2$	8	13	29	53
$p = 3$	13	18	34	58
$p = 5$	29	34	50	74
$p = 7$	53	58	74	98

Dit zijn inderdaad allemaal geen kwadraten van priemgetallen. Wat opvalt is dat veel waarden even zijn. Dat is logisch: als je de kwadraten van twee oneven priemgetallen bij elkaar optelt, dan wordt de uitkomst even. Maar ook wordt de uitkomst dan minstens $3^2 + 3^2 = 18$, terwijl het slechts 4 mag zijn als r een even priemgetal is. Dus we kunnen het geval dat p en q allebei oneven zijn, uitsluiten. Als p en q allebei even zijn, dan zijn ze allebei gelijk aan 2 en we zien al in de tabel dat dat ook niet kan. Dus we hoeven nu alleen nog maar te kijken naar het geval dat precies één van p en q even is en de ander oneven. Laten we zeggen dat $q = 2$, terwijl p juist oneven is. Dan is r ook oneven.

Nu gaan we de vergelijking op een handige manier anders schrijven. Er geldt

$$p^2 = r^2 - q^2 = r^2 - 2^2 = (r - 2)(r + 2).$$

Volgens rekenregel 2 is p een deler van minstens één van $r - 2$ en $r + 2$. Als ze allebei deelbaar zijn door p, dan is p volgens rekenregel 4 ook een deler van $(r + 2) - (r - 2)$ en dat is gelijk aan 4. Maar p is oneven en 4 heeft geen oneven priemdelers, dus dit kan niet. Omdat $(r - 2)(r + 2) = p^2$, mag $(r - 2)(r + 2)$ alleen priemfactoren p bevatten, maar de twee factoren mogen dus niet allebei deelbaar zijn door p. Aangezien $r + 2$ groter is dan

$r-2$, moet nu gelden $r-2=1$ en $r+2=p^2$. Maar dat betekent $r=3$ en $p^2=5$. Echter, 5 is geen kwadraat. Dus ook dit kan niet.

We hebben nu laten zien dat er geen enkele mogelijkheid is waarop voor drie priemgetallen p, q en r kan gelden $p^2+q^2=r^2$. □

Voorbeeld 7. *Vind alle gehele getallen n waarvoor $3n^2+n-2$ een deler is van n^3+3.*

Oplossing. Als je eens wat verschillende getallen n invult en daarvoor $3n^2+n-2$ uitrekent, dan valt het je misschien op dat dit getal steeds deelbaar is door $n+1$. Inderdaad blijken we $3n^2+n-2$ te kunnen ontbinden als $(n+1)(3n-2)$. Als $3n^2+n-2$ een deler is van n^3+3, dan is dus in elk geval ook $n+1$ een deler van n^3+3. We gaan nu eerst maar eens proberen om alle gehele getallen n te vinden waarvoor $n+1$ een deler is van n^3+3.

Allereerst moet er natuurlijk gelden dat $n+1 \neq 0$ (oftewel $n \neq -1$). We willen nu rekenregel 4 toepassen op n^3+3 om andere uitdrukkingen te vinden waar $n+1$ ook een deler van is. Hiervoor maken we geschikte veelvouden van $n+1$. Om te beginnen is $n^2(n+1)=n^3+n^2$ deelbaar door $n+1$. Met behulp van rekenregel 4 vinden we dan dat $n+1$ een deler is van $(n^3+n^2)-(n^3+3)=n^2-3$. Nu kijken we naar $n(n+1)=n^2+n$, waar $n+1$ natuurlijk ook een deler van is. Met rekenregel 4 volgt hieruit dat $n+1$ een deler is van $(n^2+n)-(n^2-3)=n+3$. Nog een keertje rekenregel 4 toepassen vertelt ons dat $n+1$ een deler is van $(n+3)-(n+1)=2$.

Nu heeft 2 slechts vier delers, namelijk 1, 2, -1 en -2. Dus $n+1=1$, $n+1=2$, $n+1=-1$ of $n+1=-2$. Daaruit volgt $n=0$, $n=1$, $n=-2$ of $n=-3$. We hebben nu vier kandidaatoplossingen voor n gevonden, maar we moeten nog wel even controleren of dit inderdaad allemaal oplossingen zijn. Dus we vullen alle mogelijkheden nog even in.

- $n=0$: dan geldt $3n^2+n-2=-2$ en $n^3+3=3$, maar -2 is geen deler van 3.
- $n=1$: dan geldt $3n^2+n-2=2$ en $n^3+3=4$, en 2 is inderdaad een deler van 4.
- $n=-2$: dan geldt $3n^2+n-2=8$ en $n^3+3=-5$, maar 8 is geen deler van -5.
- $n=-3$: dan geldt $3n^2+n-2=22$ en $n^3+3=-24$, maar 22 is geen deler van -24.

Er is dus precies één oplossing, namelijk $n=1$. □

5.1 Opgaven

Opgave 37. *Laat n een geheel getal zijn. Bewijs met behulp van rekenregel 4 dat een deler van n die groter is dan 1, nooit een deler is van $n+1$.*

Opgave 38. *Zij p een oneven priemgetal. Veronderstel dat voor zekere gehele m en n geldt dat zowel $m^2 + 2mn + n^2$ als $m^2 - 2mn + n^2$ deelbaar is door p. Bewijs dat m en n allebei deelbaar zijn door p.*

Opgave 39. *Voor welke gehele getallen a geldt dat $a + 1$ een deler is van $a^2 - a + 1$?*

Opgave 40. *Laat k een natuurlijk getal zijn zodat 15 een deler is van $(3k + 2)(5k + 2)$. Bewijs dat 3 een deler is van $k + 1$ en 5 een deler van $k - 1$.*

Opgave 41. *Vind alle paren priemgetallen p en q waarvoor $p^2 - 2q^2 = 1$.*

Opgave 42. *Stel dat voor gehele getallen a, b, c en d geldt dat $a - c$ een deler is van $ab + cd$. Bewijs dat $a - c$ ook een deler is van $ad + bc$.*

Opgave 43 (Finale 2001)**.** *Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 13x + 10}{2x^2 - 9x}$. Bepaal alle positieve gehele getallen x waarvoor $f(x)$ een geheel getal is.*

6 Deelbaarheid door 2, 3, 5, 9 en 11

Van grote getallen is het vaak niet makkelijk om de priemontbinding te vinden. Er bestaan wel trucjes om ook van grote getallen te zien of ze deelbaar zijn door bepaalde kleine (priem)getallen. Zo kun je in één oogopslag zien dat het getal 123456 deelbaar is door 2, omdat het laatste cijfer even is. Je kunt ook zien dat 123456 niet deelbaar is door 5: alleen getallen die eindigen op een 5 of een 0 zijn deelbaar door 5. Waarom is dat eigenlijk zo? En kunnen we dit ook voor deelbaarheid door andere getallen?

Een *getal* bestaat uit een aantal *cijfers*. Cijfers zitten altijd tussen de 0 en de 9. Zo is bijvoorbeeld 321 geen cijfer, maar een getal. Het getal 321 bestaat uit de cijfers 3, 2 en 1. En het getal 9 heeft precies één cijfer, namelijk het cijfer 9. We rekenen normaal gesproken met getallen: die kun je optellen, vermenigvuldigen, etc. Met cijfers kun je dat niet zomaar doen: wat is bijvoorbeeld het cijfer 3 opgeteld bij het cijfer 8? Dat is in elk geval geen cijfer! Soms is het toch handig om naar de cijfers van een getal te kijken. Daarvoor gebruiken we speciale notatie. Zo schrijven we $\overline{abc}$ voor het getal dat bestaat uit de cijfers a, b en c. We schrijven hiervoor liever niet abc zonder streep, want dan kan het verward worden met het product van de *getallen* a, b en c.

In het algemeen gebruiken we de notatie $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ voor het getal dat bestaat uit de cijfers a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1, a_0. Je weet dat a_0 het aantal eenheden aangeeft, a_1 het aantal tientallen, enzovoorts. Dus in feite geldt

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Zo is $\overline{123456} = 1 \cdot 100000 + 2 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$. Normaal schrijven we dat natuurlijk gewoon als 123456.

We kunnen nu heel makkelijk inzien waarom we alleen naar het laatste cijfer van een getal hoeven te kijken om te bepalen of het deelbaar is door 2 of door 5. Er geldt namelijk

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 0} + a_0 = 10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0.$$

Door rekenregel 4 uit de vorige sectie toe te passen, zien we dat $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ deelbaar is door 2 precies dan als a_0 deelbaar is door 2. En hetzelfde geldt voor 5: het getal $10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} + a_0$ is deelbaar door 5 precies dan als a_0 deelbaar is door 5.

Jammer genoeg is nu ook meteen duidelijk dat dit alleen voor delers van 10 werkt en dat zijn alleen 1, 2, 5 en 10. Toch kunnen we met behulp van deze notatie ook een trucje bedenken om te bepalen of een getal deelbaar is door 3.

Kijk nog eens hiernaar:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Al die factoren 10, 100, 1000, etc. zijn niet deelbaar door 3. Dat is jammer: we willen daar graag iets hebben staan dat wel deelbaar is door 3. Dat kunnen we voor elkaar krijgen door overal eentje af te halen: 9, 99, 999, etc. zijn wel allemaal deelbaar door 3. (Immers, $9999 \cdots 999 = 3 \times 3333 \cdots 333$.) Dus laten we ons getal nog een beetje anders schrijven:

$$\begin{aligned}\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &= a_n \cdot (10^n - 1) + a_n + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + a_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 9 + a_1 + a_0 \\ &= \big(a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 9\big) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0).\end{aligned}$$

Het linkerstuk is nu deelbaar door 3. Met rekenregel 4 krijgen we: het geheel is deelbaar door 3 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 3. Het rechterstuk is $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ en dat is de som van de cijfers van ons getal. Dus een getal is deelbaar door 3 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.

Nu krijgen we het trucje voor deelbaarheid door 9 cadeau. In die uitdrukking van net is het linkerstuk namelijk niet alleen deelbaar door 3, maar ook door 9. (Want $9999 \cdots 999 = 9 \times 1111 \cdots 111$.) Dus op precies dezelfde manier kunnen we laten zien dat een getal deelbaar is door 9 precies dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 9.

Ten slotte gaan we nog een trucje bedenken voor deelbaarheid door 11. Laten we eerst maar eens kijken naar een getal van drie cijfers. Dat kunnen we schrijven als

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Als we weer 1 afhalen van 100, dan krijgen we 99 en dat is deelbaar door 11. Maar bij 10 lukt dat niet: 9 is niet deelbaar door 11. Gelukkig is $10 + 1$ wel deelbaar door 11. Dus we schrijven ons getal als

$$\overline{cba} = (99c + 11b) + (c - b + a).$$

Nu is het linkerstuk weer deelbaar door 11. Dus het getal is deelbaar door 11 precies dan als het rechterstuk deelbaar is door 11. Hoe ziet dat rechterstuk eruit voor getallen met meer cijfers? Het getal $10^3 - 1 = 999$ is helaas weer niet deelbaar door 11, maar $10^3 + 1 = 1001 = 11 \cdot 91$ wel. Dus is het handig om een getal van vier cijfers zo te schrijven:

$$\overline{dcba} = (1001d + 99c + 11b) + (-d + c - b + a).$$

Daar begint een patroon in te komen! Het lijkt erop dat je de cijfers van een getal om en om moet optellen en aftrekken; als de uitkomst deelbaar is door 11, dan is het getal zelf deelbaar door 11. Die uitkomst noemen we trouwens de *alternerende* som van de cijfers.

Het belangrijkste ingrediënt van ons vermoeden is dat je bij de machten van 10 de ene keer 1 moet optellen en de andere keer 1 moet aftrekken om een getal deelbaar door 11 te krijgen. Dat gaan we eerst maar eens bewijzen.

We bewijzen eerst met inductie naar n dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n} - 1 = 99$ en dat is deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geqslant 1$. We weten dan dat $10^{2k} - 1$ deelbaar is door 11. We gaan dit eens vermenigvuldigen met 100, dan is het nog steeds deelbaar door 11:

$$100 \cdot (10^{2k} - 1) = 100 \cdot 10^{2k} - 100 = 10^{2k+2} - 1 - 99.$$

We passen rekenregel 4 weer toe: 99 is deelbaar door 11 en $100 \cdot (10^{2k} - 1)$ is deelbaar door 11, dus $10^{2k+2} - 1$ is deelbaar door 11. Dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n} - 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

Nu bewijzen we met inductie naar n dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

(Inductiebasis) Voor $n = 1$ geldt $10^{2n-1} + 1 = 11$ en dat is natuurlijk deelbaar door 11.

(Inductiestap) Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $n = k \geqslant 1$. We weten dan dat $10^{2k-1} + 1$ deelbaar is door 11. Opnieuw vermenigvuldigen we met 100:

$$100 \cdot (10^{2k-1} + 1) = 100 \cdot 10^{2k-1} + 100 = 10^{2k+1} + 1 + 99.$$

Hier volgt met behulp van rekenregel 4 uit dat $10^{2k+1} + 1$ deelbaar is door 11 en dat is wat we wilden bewijzen voor $n = k + 1$. Hiermee hebben we dus met inductie aangetoond dat $10^{2n-1} + 1$ deelbaar is door 11 voor alle natuurlijke getallen n.

Nu kunnen we bewijzen dat ons trucje met de alternerende som werkt. We doen het eerst voor een getal met een even aantal cijfers: a_{2n-1}, a_{2n-2}, $\ldots$, a_1 en a_0. Er geldt

$$\begin{aligned}\overline{a_{2n-1}a_{2n-2}\ldots a_1a_0} &= a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= \big(a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + a_{2n-2} \cdot (10^{2n-2} - 1) + \cdots + a_1 \cdot 11\big) \\ &\qquad + (-a_{2n-1} + a_{2n-2} - \cdots - a_1 + a_0).\end{aligned}$$

Het linkerstuk is helemaal deelbaar door 11, dus we concluderen dat het hele getal deelbaar is door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Nu doen we hetzelfde voor een getal met een oneven aantal cijfers:

$$\begin{aligned}\overline{a_{2n}a_{2n-1}\dots a_1a_0} &= a_{2n}\cdot 10^{2n} + a_{2n-1}\cdot 10^{2n-1} + \cdots + a_1\cdot 10 + a_0\\ &= \big(a_{2n}\cdot(10^{2n}-1) + a_{2n-1}\cdot(10^{2n-1}+1) + \cdots + a_1\cdot 11\big)\\ &\qquad\qquad + (a_{2n} - a_{2n-1} + \cdots - a_1 + a_0).\end{aligned}$$

Ook hier zien we dat het linkerstuk deelbaar is door 11, zodat het rechterstuk (de alternerende som van de cijfers) deelbaar is door 11 precies dan als het hele getal deelbaar is door 11.

We zetten alle trucjes nog even op een rijtje.

Laat N een natuurlijk getal zijn.

- N is deelbaar door 2 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 2.
- N is deelbaar door 5 precies dan als het laatste cijfer van N deelbaar is door 5.
- N is deelbaar door 3 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 3.
- N is deelbaar door 9 precies dan als de som van de cijfers van N deelbaar is door 9.
- N is deelbaar door 11 precies dan als de alternerende som van de cijfers deelbaar is door 11.

Bedenk weer even dat 0 deelbaar is door elk natuurlijk getal. Dus als een getal eindigt op een 0, dan is het getal deelbaar door 5. En als de alternerende som van de cijfers gelijk is aan 0, dan is het getal deelbaar door 11.

Voorbeeld 8. *Bepaal de priemontbinding van het getal* $n = 10780$.

Oplossing. In elk geval is n deelbaar door 2 en door 5, dus we kunnen het schrijven als $n = 1078\cdot 2\cdot 5$. Nu zien we dat er nog een factor 2 in zit: $n = 539\cdot 2^2\cdot 5$. De alternerende som van de cijfers van 539 is $5-3+9=11$, wat deelbaar is door 11, dus n is deelbaar door 11. We krijgen $n = 49\cdot 11\cdot 2^2\cdot 5$. Nu zien we dat de priemontbinding van n gelijk is aan $2^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11$. □

Voorbeeld 9. *Vind alle natuurlijke getallen* $n \leqslant 6000$ *waarvoor geldt dat* n *precies 144 keer de som van zijn cijfers is.*

Oplossing. We noemen de som van de cijfers van n even $S(n)$. Dan geldt $S(n)\cdot 144 = n$. Nu gaan we onze deelbaarheidstrucjes gebruiken. Het getal 144 is deelbaar door 9 (want $1+4+4=9$). Dus 9 is een deler van de linkerkant van de vergelijking en daarom ook van de rechterkant, dus 9 is een deler van n. Maar dan is 9 ook een deler van de som van de cijfers van n en die hadden we $S(n)$ genoemd. De linkerkant is dus deelbaar door $9 \cdot 144 = 1296$. Daaruit volgt dat n een veelvoud is van 1296.

Dat wil nog niet zeggen dat voor elk veelvoud n van 1296 geldt: $S(n) \cdot 144 = n$. We hebben alleen nog laten zien dat geen andere getallen dan veelvouden van 1296 kunnen voldoen, maar niet dat al die veelvouden daadwerkelijk voldoen. Gelukkig zijn er slechts enkele veelvouden van 1296 kleiner dan 6000, dus we kunnen ze allemaal even uitproberen. Dit doen we in de volgende tabel.

n	$S(n)$	$S(n) \cdot 144$	is gelijk aan n?
1296	18	2592	nee
2592	18	2592	ja
3888	27	3888	ja
5184	18	2592	nee

We lezen nu gemakkelijk in de tabel af dat er precies twee waarden van n kleiner dan 6000 zijn waarvoor geldt $S(n) \cdot 144 = n$, namelijk $n = 2592$ en $n = 3888$. $\square$

Het uitproberen van de vier mogelijkheden hoort echt nog bij het bewijs. Zonder dat tabelletje weten we niet precies welke van de vier getallen voldoen en zijn we dus nog niet klaar met de oplossing. Het is wel belangrijk dat we zeker weten dat dit de enige vier kandidaten zijn, anders zouden we nog veel meer getallen moeten uitproberen. In het eerste deel van het bewijs laten we zien dat er slechts vier kandidaten zijn; daarna maken we het bewijs af door die vier één voor één uit te proberen.

6.1 Opgaven

Opgave 44. *Bepaal de priemontbinding van het getal* $n = 30030$.

Opgave 45. *Vind een getal dat bestaat uit alleen maar enen en dat deelbaar is door 99.*

Opgave 46. *Bepaal cijfers a en b (met* $a \neq 0$*) zo dat* 72 *een deler is van* $\overline{a679b}$.

Opgave 47. *Het getal n bestaat uit precies 300 enen en verder een aantal nullen. Kan n een kwadraat zijn?*

Opgave 48. *Vind een getal n met de volgende eigenschap: als je de som van de cijfers van n vermenigvuldigt met 15 en bij de uitkomst 135 optelt, krijg je precies n.*

Opgave 49. *Een natuurlijk getal n van vier cijfers heeft de eigenschap dat de cijfers van klein naar groot gesorteerd vier opeenvolgende getallen zijn. Verder is gegeven dat n deelbaar is door 9 en door 11. Vind alle mogelijkheden voor n.*

7 Grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud

We kijken nog eens naar rekenregel 4. Die zegt dat een deler van m en van n ook een deler is van $m+n$. In andere woorden: als m en n een deler gemeen hebben, dan is dit ook een deler van $m+n$. We weten dat elke twee gehele getallen ten minste één positieve deler gemeen hebben, namelijk 1: dit is een deler van elk geheel getal. Soms is dit de enige positieve deler die de getallen gemeen hebben. Zo heeft 15 bijvoorbeeld als positieve delers 1, 3, 5, en 15, terwijl 8 de positieve delers 1, 2, 4 en 8 heeft. Het enige getal dat bij allebei voorkomt, is 1, dus 1 is de enige positieve deler die 8 en 15 gemeen hebben. De getallen 10 en 15 hebben meer dan één positieve deler gemeen: de positieve delers van 10 zijn 1, 2, 5 en 10 en daarvan zijn 1 en 5 allebei ook een deler van 15. De grootste daarvan is 5. We noemen 5 daarom de *grootste gemene deler* van 10 en 15. Dit korten we ook wel af met *ggd* en soms schrijven we $\mathrm{ggd}(10, 15) = 5$. Zo ook geldt $\mathrm{ggd}(8, 15) = 1$, $\mathrm{ggd}(8, -10) = 2$ en $\mathrm{ggd}(-20, -1000) = 20$. Omdat alle natuurlijke getallen een deler van 0 zijn, geldt bijvoorbeeld $\mathrm{ggd}(3, 0) = 3$ en $\mathrm{ggd}(0, -23) = 23$. De grootste gemene deler van 0 en 0 is niet gedefinieerd.

Terug naar rekenregel 4. We kunnen nu zeggen: de grootste gemene deler van m en n is ook een deler van $m+n$. De grootste gemene deler van m en n is immers een deler van zowel m als n, dus volgens rekenregel 4 ook een deler van $m+n$. Wat is nu $\mathrm{ggd}(m, m+n)$? In elk geval hebben m en $m+n$ al het getal $\mathrm{ggd}(m, n)$ gemeen als deler. Maar misschien hebben ze nog wel een grotere deler gemeen. Noem $\mathrm{ggd}(m, m+n)$ even d. Dan is d dus een deler van m en van $m+n$, dus volgens rekenregel 4 ook van $(m+n)-m = n$. Dus d is een deler van zowel m als n, maar dat betekent dat hij niet groter kan zijn dan $\mathrm{ggd}(m, n)$. Dat was immers de grootste deler die m en n gemeen hadden. Conclusie: $\mathrm{ggd}(m, m+n) = \mathrm{ggd}(m, n)$.

Rekenregel 5. *Voor gehele getallen m en n met $m \neq 0$ geldt:* $\mathrm{ggd}(m, m+n) = \mathrm{ggd}(m, n)$. *En ook:* $\mathrm{ggd}(m, m-n) = \mathrm{ggd}(m, n)$.

Als we de ggd van wat grotere getallen willen weten, dan is het niet zo handig om eerst alle delers op te moeten schrijven. Het is handiger om dan naar de priemontbinding te kijken. Stel bijvoorbeeld dat we de ggd van 36 en 120 willen weten. We kunnen deze getallen gemakkelijk in priemgetallen ontbinden: $36 = 2^2 \cdot 3^2$ en $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. We zien nu direct dat in de ggd van 36 en 120 in elk geval niet de priemfactor 5 mag voorkomen, want 5 is geen deler van 36. De priemgetallen 2 en 3 moeten er zeker wel in. En deze factoren mogen niet vaker voorkomen dan dat ze in 36 en 120 voorkomen. Dus de priemfactor 2 mag twee keer voorkomen, want hij komt precies twee keer voor in 36; de priemfactor 3 mag maar één keer voorkomen, want hij komt precies één keer voor in 120. Kortom, de grootste gemene deler van 36 en 120 is $2^2 \cdot 3 = 12$.

Wat er hier precies gebeurt, wordt nog iets duidelijker als we de getallen zo schrijven:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \qquad \text{en} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

We zorgen dus dat in de priemontbinding van beide getallen dezelfde priemgetallen staan. Omdat 5 niet echt een priemdeler is van 36, geven we hem de exponent 0 (bedenk dat 5^0 gelijk is aan 1). Nu kijken we bij elke priemfactor naar de kleinste exponent. Bij de priemfactor 2 is dat 2, bij de priemfactor 3 is dat 1 en bij de priemfactor 5 is dat 0. Dus de ggd is $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$. Dit is in feite precies het argument van hierboven, maar dan wat overzichtelijker opgeschreven.

We kunnen nu de getallen opschrijven als het product van de ggd en de overige factoren:

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 3, \\ 120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5. \end{aligned}$$

Het stuk tussen haakjes is precies de ggd en is bij allebei de getallen hetzelfde. Buiten de haakjes staan juist bij beide getallen verschillende priemfactoren.

Voorbeeld 10. *Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b. Wat is nu* $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$*?*

Oplossing. Laten we dit eerst even uitproberen op ons voorbeeld van hierboven, met $a = 36$ en $b = 120$, zodat $d = 12$. Dan geldt $\frac{a}{d} = 3$ en $\frac{b}{d} = 10$. Die getallen hebben ggd 1. Verder valt het op dat deze getallen precies het product zijn van de priemfactoren die hierboven buiten de haakjes stonden. Dat is natuurlijk geen toeval. Het getal d is precies het product van de priemgetallen binnen de haakjes, dus $\frac{a}{d}$ is het product van de getallen buiten de haakjes. En de eigenschap van de grootste gemene deler van a en b was nou juist dat de getallen buiten de haakjes bij a geen priemfactoren meer gemeen hadden met de getallen buiten de haakjes bij b. Dus $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ moet wel gelijk zijn aan 1.

Dat schrijven we nog een keertje netjes op. We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdeler zou zijn van zowel e als f, dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. $\square$

Een begrip dat een beetje lijkt op de ggd is het *kleinste gemene veelvoud* van twee getallen a en b. Dat is het kleinste natuurlijke getal n dat een veelvoud is van zowel a als b. We korten dit ook wel af tot *kgv* of $\text{kgv}(a, b)$. We kunnen het kgv van twee getallen weer heel makkelijk uit de priemontbinding halen. Laten we nog eens kijken naar 36 en 120. Het kgv van 36 en 120 moet in elk geval een veelvoud worden van $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Het moet natuurlijk ook een veelvoud zijn van $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, dus we moeten de priemfactoren van 36 aanvullen totdat alle priemfactoren van 120 er ook in zitten. Er moet dus een extra 2 bij en nog een 5. Dus $\text{kgv}(36, 120) = 36 \cdot 2 \cdot 5 = 360$. We hadden natuurlijk ook van 120 uit kunnen gaan en daar nog een extra factor 3 aan kunnen toevoegen. Dat geeft gelukkig hetzelfde antwoord: $\mathrm{kgv}(36, 120) = 120 \cdot 3 = 360$.

Ook hier kan het makkelijker zijn om de priemontbindingen even zo op te schrijven dat in beide dezelfde priemgetallen staan:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \qquad \text{en} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

Omdat al deze priemfactoren net zo vaak moeten voorkomen in het kgv als ze in één van beide getallen doen, moeten we nu kijken naar de grootste exponenten. De grootste exponent bij de factor 2 is 3, de grootste exponent bij de factor 3 is 2 en de grootste exponent bij de factor 5 is 1. Dus $\mathrm{kgv}(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Zo ook is bijvoorbeeld $\mathrm{kgv}(4, 8) = 8$ en $\mathrm{kgv}(-6, 10) = 30$. De kgv van 0 en 3 is niet gedefinieerd, want er bestaat geen positief veelvoud van 0.

Voorbeeld 11. *Laat n een natuurlijk getal zijn. Bewijs dat geldt:* $\mathrm{kgv}(n, n+1) = n^2 + n$.

Oplossing. We maken eerst eens een tabelletje om te kijken of dit waar is voor wat kleine waarden van n:

n	priemontbinding van n	priemontbinding van $n+1$	$\mathrm{kgv}(n, n+1)$	$n^2 + n$
1	1	2	2	2
2	2	3	6	6
3	3	2^2	12	12
4	2^2	5	20	20
5	5	$2 \cdot 3$	30	30
6	$2 \cdot 3$	7	42	42

We bepalen steeds het kgv door aan de priemontbinding van n de priemfactoren van $n+1$ toe te voegen die nog niet (vaak genoeg) voorkomen. Hier valt het op dat dit steeds alle priemfactoren van $n+1$ zijn. De getallen n en $n+1$ hebben in bovenstaande tabel nooit priemfactoren gemeen. Maar eigenlijk wisten we dat al! Kijk maar eens terug naar opgave 37.

Nu is het makkelijk om het af te maken. Het kgv van n en $n+1$ moet alle priemfactoren van n en $n+1$ bevatten, net zo vaak als ze voorkomen in minstens één van beide. Maar n en $n+1$ hebben geen priemfactoren gemeen, dus we kunnen het kgv vinden door simpelweg n en $n+1$ te vermenigvuldigen. Dat geeft $\mathrm{kgv}(n, n+1) = n(n+1) = n^2 + n$. □

7.1 Opgaven

Opgave 50. *Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen n de grootste gemene deler van n^2 en $(n+1)^2$ gelijk is aan 1.*

Opgave 51. *Laat m, n en k gehele getallen zijn met $m \neq 0$. Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(m, n+km) = \operatorname{ggd}(m, n)$.

Opgave 52. *Laat a en b gehele getallen zijn zodat* $\operatorname{ggd}(a, b) = 1$. *Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = 1$ *of* $\operatorname{ggd}(a-b, a+b) = 2$.

Opgave 53. *Laat n en k gehele getallen zijn. Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(n, 2k+1) = \operatorname{ggd}(2n, 2k+1)$.

Opgave 54. *Laat a en b positieve oneven getallen zijn met $a < b$. Bewijs dat* $2\operatorname{ggd}(a, b) \leqslant b - a$.

Opgave 55. *Laat a en b natuurlijke getallen zijn. Bewijs dat geldt:* $\operatorname{ggd}(a, b) \cdot \operatorname{kgv}(a, b) = a \cdot b$. *Bedenk hiermee een nieuwe oplossing voor voorbeeld 11.*

Opgave 56. *Definieer een rij natuurlijke getallen a_1, a_2, a_3, ... als volgt: $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = a_n + 2n$ voor alle natuurlijke getallen $n \geqslant 1$. Bewijs dat* $\operatorname{ggd}(a_n, a_{n+1}) = 1$ *voor alle natuurlijke getallen n.*

Opgave 57. *Laat a, b en c gehele getallen zijn. Bewijs dat de grootste gemeenschappelijke deler van $2a+1$, $2b+1$ en $2c+1$ gelijk is aan de grootste gemeenschappelijke deler van $a+b+1$, $b+c+1$ en $c+a+1$.*

Opgave 58 (Finale 1982)**.** *Definieer $n = 9^{753}$. Bepaal* $\operatorname{ggd}(n^2+2, n^3+1)$.

Opgave 59 (Finale 1998)**.** *Van twee positieve gehele getallen m en n is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud gelijk aan* $133866 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 67$. *Het verschil $m - n$ is gelijk aan 189. Bereken m en n.*

8 Gemengde opgaven

Opgave 60 (Finale 2011)**.** *Bepaal alle drietallen positieve gehele getallen (a, b, n) waarvoor geldt dat $a! + b! = 2^n$. (Hierbij staat $k!$ voor $1 \times 2 \times \cdots \times k$, dus bijvoorbeeld $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$.)*

Opgave 61 (Finale 2012)**.** *Bepaal alle paren (p, m) bestaande uit een priemgetal p en een positief geheel getal m waarvoor geldt dat*

$$p^3 + m(p+2) = m^2 + p + 1.$$

Opgave 62 (Finale 2012)**.** *Gegeven zijn vier verschillende gehele getallen a, b, c en d. Bewijs dat*

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

deelbaar is door 12.

Opgave 63 (Finale 1997)**.** *Bij elk positief geheel getal n definiëren we $f(n)$ als het product van de som van de cijfers van n met n zelf. Voorbeelden: $f(19) = (1+9) \cdot 19 = 190$ en $f(97) = (9+7) \cdot 97 = 1552$.*
Toon aan dat er geen getal n bestaat met $f(n) = 19091997$.

Opgave 64 (Finale 2013)**.** *Voor een positief geheel getal n geven we met $P(n)$ het product van de positieve delers van n aan. Zo is bijvoorbeeld $P(20) = 8000$. De positieve delers van 20 zijn namelijk 1, 2, 4, 5, 10 en 20, met als product $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8000$.*

(a) Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n$.

(b) Laat zien dat er geen positieve gehele getallen n bestaan waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

Opgave 65 (Finale 2006)**.** *Er geldt $1+2+3+4+5+6 = 6+7+8$. Wat is het kleinste getal k groter dan 6 waarvoor geldt*
$1+2+\cdots+k = k+(k+1)+\cdots+n$, met n een geheel getal groter dan k?

Opgave 66 (Finale 2004)**.** *Een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c heeft de volgende eigenschappen: $a = p^m$ en $b = q^n$ met p en q priemgetallen en m en n positieve gehele getallen, $c = 2k+1$ met k een positief geheel getal.*
Bepaal alle mogelijke waarden van c en de daarbij horende waarden van a en b.

Katern 3

Meetkunde

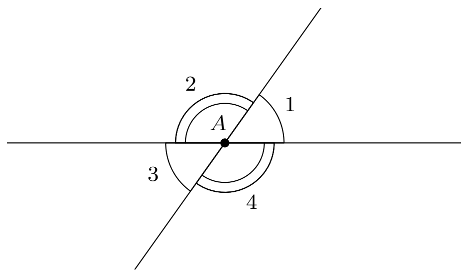
De vlakke meetkunde is de meetkunde die zich afspeelt in het platte vlak. De hoofdrolspelers van de vlakke meetkunde zijn de punten en de lijnen van driehoeken, vierhoeken en andere veelhoeken. Ook cirkels komen geregeld in een meetkunde-opgave voor. In dit katern bekijken we eerst enkele technieken om te laten zien dat bepaalde hoeken even groot of bepaalde lijnstukken even lang zijn. Daarna bestuderen we een aantal speciale driehoeken en vierhoeken die allerlei handige eigenschappen hebben.

Net als bij de onderwerpen die je in de andere katernen bent tegengekomen, kun je bij meetkundige bewijzen verschillende richtingen in slaan. De eerste stap is echter altijd hetzelfde: het maken van een net plaatje. Hoe groter en netter je plaatje is, hoe beter het je zal helpen bij het oplossen van de opgave. In de opgave zijn meestal al een aantal eigenschappen van dit plaatje gegeven. De stellingen en technieken die we in dit hoofdstuk behandelen, kun je gebruiken om op basis daarvan weer nieuwe eigenschappen van het plaatje te vinden. Er blijken dan bijvoorbeeld plotseling twee hoeken gelijk te zijn of twee lijnstukken even lang. Door steeds meer nieuwe eigenschappen te vinden en de gevonden eigenschappen weer handig met elkaar te combineren, kun je uiteindelijk het gevraagde bewijzen.

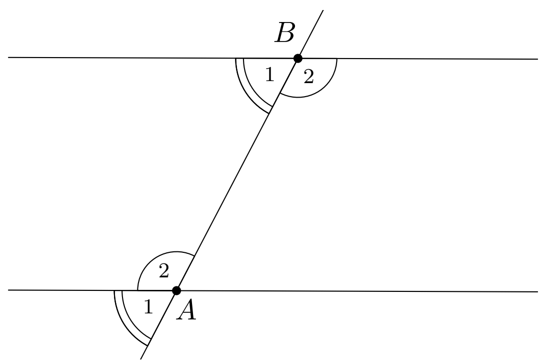
9 Hoeken

Als twee lijnen elkaar snijden, dan maken ze in het snijpunt een *hoek* met elkaar. We meten hoeken in graden en noteren de hoek bij punt A als $\angle A$. Soms is het niet duidelijk welke hoek we precies bedoelen; dan kunnen we een getal (een zogenaamde *index*) toevoegen aan de naam van de hoek. Zo zie je in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ en $\angle A_4$. Deze vier hoeken zijn samen precies 360°, een heel rondje rond. We noemen dat ook wel een *volledige hoek*. De helft hiervan is 180° en dat noemen we een *gestrekte hoek*. In de figuur vormen $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek. Een *rechte hoek* is ten slotte een hoek van precies 90°.

We kunnen een hoek ook met drie letters noteren: $\angle BAC$ is de hoek die je krijgt als je van punt B naar punt A loopt en daarna van punt A naar punt C. Het gaat dan om de hoek bij punt A. Deze notatie is vooral handig als er meer dan twee lijnen door punt A gaan: dan is het niet meer duidelijk welke hoek je bedoelt met $\angle A$. De notatie $\angle BAC$ geeft dan aan dat het gaat om de hoek bij A tussen de lijnen AB en AC. In figuur 3 bijvoorbeeld wordt met hoek $\angle BAC$ dus hoek $\angle A_2$ bedoeld.



Figuur 1. *Volledige, gestrekte, overstaande hoeken.*



Figuur 2. *F-hoeken en Z-hoeken.*

9.1 Overstaande hoeken

We hadden gezien dat in figuur 1 de hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_2$ samen een gestrekte hoek vormen. Oftewel: $\angle A_1 + \angle A_2 = 180°$. Hetzelfde geldt natuurlijk voor $\angle A_2$ en $\angle A_3$: de som daarvan is ook 180°. Dus

$$\angle A_1 = 180° - \angle A_2 = \angle A_3.$$

De hoeken $\angle A_1$ en $\angle A_3$ zijn dus even groot. In het algemeen zeggen we dat bij twee snijdende lijnen de *overstaande hoeken* gelijk zijn. Net zo goed zijn dus $\angle A_2$ en $\angle A_4$ even groot, want dat zijn ook overstaande hoeken.

9.2 F- en Z-hoeken

In figuur 2 zie je twee evenwijdige lijnen en een derde lijn die deze twee lijnen snijdt, de ene lijn in A en de andere lijn in B. In zo'n plaatje zijn de hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ aan elkaar gelijk. We noemen zulke hoeken bij evenwijdige lijnen ook wel F-hoeken. Er zijn ook Z-hoeken: in de figuur zijn dat $\angle A_2$ en $\angle B_2$. Die hoeken zijn ook even groot. Wanneer een plaatje evenwijdige lijnen bevat, levert dat dus altijd allerlei gelijke hoeken op.

Je kunt de gelijkheid van twee hoeken ook gebruiken om juist te bewijzen dat twee lijnen evenwijdig zijn. Stel je dat een plaatje hebt zoals in figuur 2, maar je weet nog niet dat de twee lijnen evenwijdig zijn. Als je dan kunt bewijzen dat de F-hoeken $\angle A_1$ en $\angle B_1$ gelijk zijn of juist de Z-hoeken $\angle A_2$ en $\angle B_2$, dan volgt daaruit dat de lijnen evenwijdig zijn.

Als de lijnen k en ℓ evenwijdig zijn, dan noteren we dat trouwens met $k \parallel \ell$.

9.3 Hoekensom

Verder is er nog een heel belangrijk resultaat over hoeken in een driehoek.

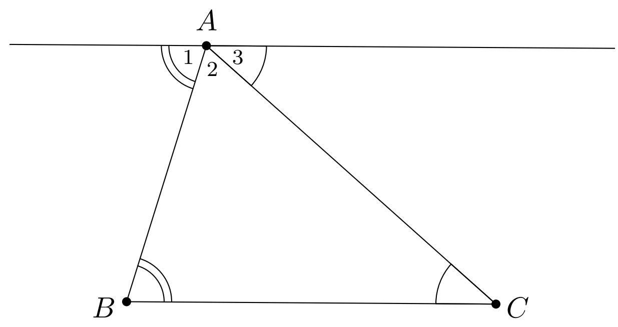
Stelling 9.3.1 (Hoekensom in een driehoek). *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt dat $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.*

Bewijs. Trek een lijn evenwijdig aan BC door A, zoals in figuur 3. Dan geldt $\angle B = \angle A_1$ en $\angle C = \angle A_3$ wegens Z-hoeken. Bovendien vormen $\angle A_1$, $\angle A_2$ en $\angle A_3$ samen een gestrekte hoek. Dus $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_2 + \angle A_1 + \angle A_3 = 180°$. □

9.4 Opgaven

Opgave 67. *Laat $\triangle ABC$ gegeven zijn. De lijn door C evenwijdig met AB en de lijn door B evenwijdig met AC snijden elkaar in punt P. Bewijs dat $\angle BAC = \angle CPB$.*

Opgave 68 (Buitenhoekstelling). *Laat driehoek $\triangle ABC$ gegeven zijn. Punt X ligt op AB zodat B tussen A en X ligt. Bewijs dat $\angle CBX = \angle BAC + \angle ACB$. (We noemen $\angle CBX$ ook wel de* buitenhoek *van $\triangle ABC$ bij $\angle B$.)*



Figuur 3. *Ondersteuning bij het bewijs van stelling 9.3.1.*

Opgave 69 (U-hoeken)**.** *Laat A, B, X en Y vier punten zijn zodat X en Y aan dezelfde kant van lijn AB liggen.*

(a) Stel dat $AX \parallel BY$. Bewijs dat $\angle XAB + \angle YBA = 180°$.

(b) Stel dat $\angle XAB + \angle YBA = 180°$. Bewijs dat $AX \parallel BY$.

Opgave 70. *In een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ is D het punt op BC zodat $\angle ADB = 90°$ en F het punt op AB zodat $\angle CFA = 90°$. Zij S het snijpunt van AD en CF. Bewijs dat*

(a) $\angle BAD = \angle FCB$;

(b) $\angle ABC = \angle FSA$.

(Een driehoek heet scherphoekig *als alle drie de hoeken scherp zijn, d.w.z. kleiner dan $90°$).*

Opgave 71. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met D een punt op zijde AC (tussen A en C in) en E een punt op zijde BC (tussen B en C in). Laat F het punt binnen de driehoek zijn zodat AF de hoek $\angle DAE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EAF = \angle DAF$; we noemen de lijn AF ook wel de* bissectrice *van $\angle DAE$) en BF de hoek $\angle DBE$ precies doormidden deelt (d.w.z. $\angle EBF = \angle DBF$). Bewijs dat $\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB$.*

10 Congruentie en gelijkvormigheid

Laten we eens kijken naar de mogelijkheden om twee driehoeken met elkaar te vergelijken.

10.1 Congruentie

Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. Als je deze driehoek oppakt en een stukje verschuift, draait en misschien een keertje spiegelt, dan krijg je een nieuwe driehoek $\triangle DEF$ die eigenlijk in heel veel opzichten hetzelfde is als $\triangle ABC$. De twee driehoeken hebben precies dezelfde vorm en grootte, alleen liggen ze op een andere plek in je tekening. In de wiskunde noemen we zulke driehoeken *congruent*.

Voor congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \qquad \angle B = \angle E, \qquad \angle C = \angle F,$$

$$|AB| = |DE|, \qquad |BC| = |EF| \qquad \text{en} \qquad |AC| = |DF|.$$

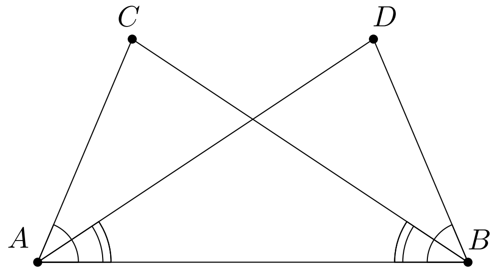
Met de notatie $|AB|$ geven we hier de lengte van het lijnstuk AB aan. Sommige van deze gelijkheden kun je uit de andere afleiden. Als je bijvoorbeeld weet dat $\angle A = \angle D$ en $\angle B = \angle E$, dan volgt daaruit dat $\angle C = \angle F$, omdat de som van de hoeken in beide driehoeken $180°$ is. Zo zijn twee driehoeken congruent als ze overeenkomstig hebben:

1. drie zijden (ZZZ),
2. twee zijden met de ingesloten hoek (ZHZ),
3. twee zijden en een rechte hoek (ZZR),
4. twee hoeken met de ingesloten zijde (HZH),
5. twee hoeken met een niet-ingesloten zijde (HHZ).

De drie letters achter de gevallen zijn korte "codes" om makkelijk aan te geven door welk geval een paar driehoeken congruent zijn. De *ingesloten hoek* bij het tweede geval betekent dat de hoek die je weet, precies tussen de twee zijdes die je weet ligt. Bijvoorbeeld: als $\angle A = \angle D$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$, dan zijn driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ congruent wegens het geval ZHZ: $\angle A$ is de hoek die ingesloten is tussen de zijden AB en AC. Echter, als je in plaats van $\angle A = \angle D$ hebt dat $\angle B = \angle E$, dan wil dat nog niet zeggen dat de driehoeken congruent zijn (zie ook opgave 72). De hoek die je dan weet, is nu niet de ingesloten hoek tussen de twee zijden die je weet. Je zou dus in geval ZZH zitten, maar die staat niet in bovenstaand lijstje. Is de hoek $\angle B = \angle E$ echter recht, dan heb je toch congruente driehoeken, op grond van ZZR.

Als twee driehoeken congruent zijn, dan noteren we dat als $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Vaak zetten we er dan tussen haakjes de "code" van het congruentiegeval achter, bijvoorbeeld (ZHZ). Let bij het opschrijven van een congruentie goed op de volgorde van de hoekpunten van de driehoeken! De volgorde moet zo zijn dat de hoeken bij de eerst genoemde hoekpunten, A en D, gelijk zijn; en zo ook voor het paar B en E en het paar C en F. Op die manier kun je meteen zien welke zijden er gelijk zijn: de zijden gevormd door de eerste twee letters links en rechts zijn gelijk, net als de zijden gevormd door de laatste twee letters en de zijden gevormd door de eerste en laatste letters.

Als je eenmaal weet dat vanwege een van de gevallen hierboven twee driehoeken congruent zijn, dan volgt daaruit dat de drie paren hoeken en de drie paren zijden allemaal gelijk zijn. Dat geeft je dus weer nieuwe informatie. Dit is een manier om te bewijzen dat twee hoeken of twee zijden gelijk zijn.



Figuur 4. *Figuur bij voorbeeld 12.*

Voorbeeld 12. *Bekijk een lijnstuk AB en twee punten C en D aan dezelfde kant van AB zodat $\angle CAB = \angle DBA$ en $\angle CBA = \angle DAB$ (zie figuur 4). Bewijs dat $|BC| = |AD|$.*

Oplossing. We hebben al twee paren gelijke hoeken. De hoeken $\angle CAB$ en $\angle CBA$ zitten in driehoek $\triangle ABC$, terwijl de hoeken $\angle DBA$ en $\angle DAB$ in driehoek $\triangle ABD$ zitten. We zien dat hoek $\angle A$ in driehoek $\triangle ABC$ gelijk is aan hoek $\angle B$ in driehoek $\triangle ABD$ en andersom. We gaan nu met congruentiegeval HZH (nummer 4 hierboven) bewijzen dat $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. De twee hoeken hebben we al. De ingesloten zijde is in de ene driehoek AB en in de andere BA. Deze zijn natuurlijk even lang. Dus wegens HZH geldt $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. Hieruit volgt $|BC| = |AD|$. $\square$

10.2 Gelijkvormigheid

Zoals we hierboven hebben gezien, hebben twee congruente driehoeken precies dezelfde vorm en grootte. De ene driehoek is als het ware een kopie van de ander, die op een andere plek in je tekening neergelegd is. Wat nou als we een driehoek zouden kopiëren en daarbij met een bepaalde factor zouden vergroten of verkleinen? De vorm van de driehoek verandert dan niet, maar de grootte wel. Anders gezegd: de hoeken blijven gelijk en de verhoudingen tussen de lengtes van de zijden ook, maar de lengtes van de zijden zelf veranderen. Twee zulke driehoeken noemen we gelijkvormig. Als driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ gelijkvormig zijn, noteren we dit met $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Let ook hier altijd weer goed op de volgorde. Voor gelijkvormige driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ geldt

$$\angle A = \angle D, \qquad \angle B = \angle E, \qquad \angle C = \angle F$$

en

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}.$$

Net als bij congruentie, heb je niet al deze gegevens nodig om te kunnen concluderen dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Als je bijvoorbeeld weet dat $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$ en ook nog dat de hoeken die door deze zijden worden ingesloten gelijk zijn (dus $\angle B = \angle E$) dan volgt daar al uit dat de twee driehoeken gelijkvormig zijn. Dat is het tweede geval van de gelijkvormigheidsgevallen hieronder:

1. de verhoudingen van de drie paren zijden (zzz),
2. de verhoudingen van twee paar zijden en de ingesloten hoek (zhz),
3. de verhouding van twee paar zijden en een rechte hoek (zzr),
4. twee hoeken (hh).

Net als bij congruentie gebruiken we "codes" van twee of drie letters om aan te geven uit welk geval de gelijkvormigheid volgt. Bij gelijkvormigheid schrijven we deze codes met kleine letters, terwijl we bij congruentie altijd hoofdletters gebruiken.

Bij de verhoudingen zoals we die hierboven hebben opgeschreven, deel je steeds de lengte van een zijde in de eerste driehoek door de lengte van de overeenkomstige zijde in de tweede driehoek. Als je dit voor alle drie de zijden doet, krijg je steeds dezelfde verhouding. Je kunt ook in plaats daarvan juist twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen. Als je de overeenkomstige zijden van de andere driehoek door elkaar deelt, komt er hetzelfde uit. Kortom, bij een gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ geldt niet alleen

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

maar ook

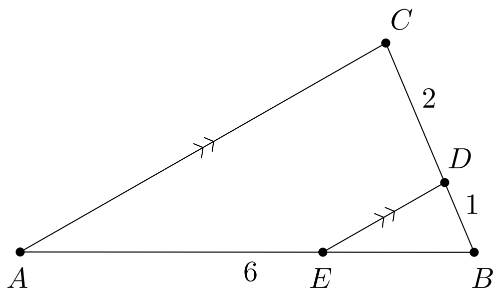
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}.$$

Dat dit eigenlijk gewoon hetzelfde is, kun je zien door kruislings te vermenigvuldigen. Zowel bij de eerste als bij de tweede gelijkheid krijg je dan $|AB| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE|$.

Voorbeeld 13. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$. Op zijde BC ligt een punt D met $|BD| = 1$ (zie figuur 5). Op zijde AB ligt een punt E zodat de lijnen ED en AC evenwijdig zijn. Hoe groot is $|AE|$?*

Oplossing. Vanwege F-hoeken geldt $\angle BCA = \angle BDE$ en $\angle CAB = \angle DEB$. Dus hebben we een gelijkvormigheid: $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ (hh). Nu kunnen we kiezen welke soort verhoudingen we gaan gebruiken. Laten we eerst eens twee zijden van dezelfde driehoek door elkaar delen en dat ook bij de andere driehoek doen:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|EB|}{|BD|}.$$



Figuur 5. *Figuur bij voorbeeld 13.*

We weten $|AB| = 6$ en $|BC| = 3$, dus links staat 2. De breuk rechts moet dan ook wel gelijk zijn aan 2 en verder weten we dat $|BD| = 1$. Dus $|EB| = 2$. Daaruit volgt $|AE| = 6 - 2 = 4$. □

10.3 Opgaven

Opgave 72. *Teken twee niet-congruente driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ zodat $\angle B = \angle E$, $|AB| = |DE|$ en $|AC| = |DF|$.*

Opgave 73. *In een driehoek $\triangle ABC$ met $|AC| = |BC|$ is M het midden van zijde AB.*

(a) *Bewijs dat $\triangle AMC \cong \triangle BMC$.*

(b) *Bewijs dat $\angle ACM = \angle BCM$.*

(c) *Bewijs dat $\angle AMC = 90°$.*

Opgave 74. *Gegeven zijn twee lijnstukken AB en CD met snijpunt S zodat S het midden is van zowel AB als CD. Bewijs dat de lijnen AC en BD evenwijdig zijn.*

Opgave 75. *Laat driehoek $\triangle ABC$ een driehoek zijn met $\angle C < \angle A$. Laat D een punt op zijde BC zijn zodat $\angle BDA = \angle BAC$. Bewijs dat $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$.*

Opgave 76. *In driehoek $\triangle ABC$ ligt punt D op zijde AB tussen A en B en punt E op zijde AC tussen A en C zodat $|AD| = \frac{1}{2}|DB|$ en $|AE| = \frac{1}{2}|EC|$. Bewijs dat*

(a) *BC evenwijdig is aan DE;*

(b) *$|DE| = \frac{1}{3}|BC|$.*

Opgave 77. *Laat P een punt zijn buiten de cirkel C met middelpunt M. Bewijs dat de raaklijnen[2] aan C die door P gaan even lang zijn.*

[2] Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die de cirkel maar één keer snijdt. De lijn die het raakpunt verbindt met het middelpunt van de cirkel, staat loodrecht op de raaklijn.

Opgave 78. *Zij $\triangle ABC$ een driehoek. De lijn ℓ door A die de hoek $\angle BAC$ precies in tweeën deelt noemen we de* bissectrice *van $\angle BAC$. Bewijs dat voor een punt P op ℓ geldt dat $d(P, AB) = d(P, AC)$. Hierbij staat $d(P, k)$ voor de afstand van het punt P tot de lijn k.*
(Hint: als Q het punt op k is zodat PQ loodrecht op k staat, dan is $d(P, k) = |PQ|$.)

Opgave 79. *Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Zij K het midden van BC en zij L het midden van CA. Zij Z het snijpunt van AK en BL.*

(a) Toon aan dat $|AB| = 2|KL|$.

(b) Toon aan dat $|AZ| = 2|ZK|$.

Opgave 80. *In driehoek $\triangle ABC$ is D een punt op zijde BC en E een punt op zijde AC, zodat $\angle ADB = \angle AEB$. Bewijs dat $\triangle ACB \sim \triangle DCE$.*

Opgave 81. *Een* zwaartelijn *van een driehoek verbindt een hoekpunt met het midden van de tegenoverliggende zijde. Een driehoek heeft dus drie zwaartelijnen. Gebruik opgave 79(b) om te laten zien dat de drie zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan (het* zwaartepunt*).*

11 Driehoeken

We gaan kijken naar een paar speciale driehoeken en hun eigenschappen.

11.1 Gelijkbenige driehoek

Een driehoek met twee even lange zijden noemen we een *gelijkbenige* driehoek. De hoek ingesloten door de gelijke zijden heet de *tophoek* en de andere hoeken heten de *basishoeken*. Over gelijkbenige driehoeken bestaat een heel bekende stelling:

Stelling 11.1.1 (Stelling van de gelijkbenige driehoek)**.** *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn.*

- *als er geldt dat $\angle B = \angle C$, dan geldt er ook dat $|AB| = |AC|$;*
- *als er juist geldt dat $|AB| = |AC|$, dan geldt er ook dat $\angle B = \angle C$.*

Met andere woorden, als je weet dat een driehoek gelijkbenig is (dus twee gelijke zijden heeft), dan weet je meteen ook dat de basishoeken gelijk zijn. Als je andersom weet dat een driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan is het een gelijkbenige driehoek met als tophoek juist de derde hoek. Laten we eens kijken hoe we deze stelling kunnen bewijzen.

Bewijs.

- ≻ Neem aan dat we $\angle B = \angle C$ weten. Definieer dan D als het punt op BC waarvoor $\angle ADB = 90° = \angle ADC$. Dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (HHZ): immers, $\angle B = \angle C$, $\angle ADB = \angle ADC$ en $|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt $|AB| = |AC|$ direct.
- ≻ Neem nu aan dat $|AB| = |AC|$. Laat D nu het midden van BC zijn, dan geldt $\triangle BDA \cong \triangle CDA$ (ZZZ). Er geldt namelijk dat $|AB| = |AC|$, $|BD| = |CD|$ en $|AD| = |AD|$. Uit de congruentie volgt nu $\angle B = \angle C$. □

Omdat de stelling uit twee verschillende delen bestaat, hebben we voor elk deel een apart bewijs gegeven. Vanaf nu mogen we deze stelling zonder bewijs toepassen (want we hebben hem al bewezen). We weten dus nu dat een driehoek gelijkbenig is precies dan als hij twee gelijke hoeken heeft. Wiskundigen gebruiken ook wel de uitdrukking “dan en slechts dan als” hiervoor: voor een driehoek $\triangle ABC$ geldt $|AB| = |AC|$ dan en slechts dan als $\angle B = \angle C$.

We hadden eigenlijk net zo goed een gelijkbenige driehoek kunnen definiëren als een driehoek met twee gelijke hoeken. Met de stelling hierboven volgt daar toch uit dat de driehoek dan ook twee gelijke zijden heeft. We noemen dat *equivalente definities* van de gelijkbenige driehoek: het maakt niet uit of je een gelijkbenige driehoek nou op de ene of op de andere manier definieert.

In opgave 73 hebben we nog een andere bijzondere eigenschap van een gelijkbenige driehoek gezien: in een gelijkbenige driehoek vallen de *bissectrice* (de lijn die de hoek precies in tweeën deelt), de *zwaartelijn* (de lijn door het midden van de tegenoverliggende zijde) en de *hoogtelijn* (de lijn loodrecht op de tegenoverliggende zijde) van de tophoek samen. Deze drie lijnen zijn dus hetzelfde. Dit geldt ook andersom: als twee van deze lijnen samenvallen, dan is de driehoek ook automatisch gelijkbenig. In opgave 82 bewijs je dit voor de hoogtelijn en de zwaartelijn en voor de hoogtelijn en de bissectrice. Al met al hebben we dus de volgende vijf equivalente definities van de gelijkbenige driehoek:

Equivalente definities 1 (Gelijkbenige driehoek)**.** *Een gelijkbenige driehoek is een driehoek*

- *met twee gelijke hoeken;*
- *met twee gelijke zijden;*
- *waarin een hoogtelijn samenvalt met een zwaartelijn;*
- *waarin een hoogtelijn samenvalt met een bissectrice;*
- *waarin een bissectrice samenvalt met een zwaartelijn.*

11.2 Gelijkzijdige driehoek

Een driehoek waarvan zelfs alle drie de zijden even lang zijn, heet een *gelijkzijdige* driehoek. Ook deze speciale eigenschap kunnen we vertalen in de hoeken van de driehoek.

Stelling 11.2.1 (Stelling van de gelijkzijdige driehoek)**.** *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt $|AB| = |BC| = |CA|$ dan en slechts dan als $\angle A = \angle B = \angle C$.*

Bewijs. Omdat dit een "dan en slechts dan"-stelling is, bestaat het bewijs weer uit twee delen.

- Neem eerst aan dat $|AB| = |BC| = |CA|$. Omdat $|AB| = |BC|$, is de driehoek gelijkbenig met tophoek B en geldt volgens de stelling van de gelijkbenige driehoek dat $\angle A = \angle C$. Ook weten we dat $|BC| = |CA|$ en dus is de driehoek gelijkbenig met tophoek C. Hieruit volgt $\angle A = \angle B$. Als we dit samenvoegen, zien we dat $\angle A = \angle B = \angle C$.
- Neem nu aan dat $\angle A = \angle B = \angle C$. We passen weer de stelling van de gelijkbenige driehoek toe, maar nu de andere kant op. Uit $\angle A = \angle B$ volgt dat $|CA| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek C) en uit $\angle A = \angle C$ volgt dat $|AB| = |BC|$ (want $\triangle ABC$ is gelijkbenig met tophoek B). Dus $|AB| = |BC| = |CA|$. □

De som van de hoeken van elke driehoek is 180°, dus dat geldt ook voor een gelijkzijdige driehoek. Omdat alle hoeken van een gelijkzijdige driehoek ook nog eens gelijk zijn, moeten al deze hoeken dan gelijk zijn aan 60°. Andersom geldt natuurlijk dat als twee hoeken van een driehoek allebei 60° zijn, dat dan de derde ook wel 60° moet zijn en daar volgt dan weer uit dat de driehoek gelijkzijdig is. Al met al krijgen we de volgende equivalente definities voor een gelijkzijdige driehoek:

Equivalente definities 2 (Gelijkzijdige driehoek)**.** *Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek*

- *waarin alle hoeken gelijk zijn;*
- *waarin twee hoeken gelijk zijn aan* 60°*;*
- *met drie gelijke zijden;*
- *die gelijkbenig is met een tophoek van* 60°*.*

Onthoud deze equivalente definities, zodat je op elk moment degene kunt gebruiken die in die situatie het handigste uitkomt.

11.3 Rechthoekige driehoek

Ten slotte zijn er nog de driehoeken waarvan een van de hoeken gelijk is 90°. Aangezien een hoek van 90° een rechte hoek genoemd wordt, zegt men dat zo'n driehoek *rechthoekig* is. Een zeer beroemde stelling over dit soort driehoeken is de stelling van Pythagoras.

Stelling 11.3.1 (Stelling van Pythagoras)**.** *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. Dan geldt $\angle A = 90°$ dan en slechts dan als $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.*

Bewijs. Door de "dan en slechts dan" bestaat dit bewijs weer uit twee delen.

- Stel dat $\angle A = 90°$ en laat D het punt op BC zijn zodat $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Dan geldt $\angle ABC = \angle DBA$ en $\angle ADB = 90° = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (hh). Verder is $\angle ACB = \angle DCA$ en $\angle CDA = 90° = \angle CAB$. Hieruit volgt de gelijkvormigheid $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (hh).

  Uit de eerste gelijkvormigheid volgt $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DB|}{|BA|}$ en uit de tweede volgt $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$. Omdat $|BD| + |DC| = |BC|$, geldt

  $$|BC|^2 = |BC| \cdot (|BD| + |DC|) = |BC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |DC|.$$

  Als we de verhoudingen die we net gevonden hebben, kruislings vermenigvuldigen, krijgen we $|BC| \cdot |BD| = |AB|^2$ en $|BC| \cdot |DC| = |AC|^2$. Dit vullen we in en we vinden $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$.

- Stel nu dat $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$. We construeren nu een rechthoekige driehoek $\triangle DEF$ met een rechte hoek bij D en rechthoekszijden DE even lang als AB en DF even lang als AC. Er geldt dus $|DE| = |AB|$ en $|DF| = |AC|$. Omdat $\triangle DEF$ rechthoekig is (zo hebben we hem immers geconstrueerd) geldt volgens het eerste deel van de stelling Pythagoras (wat we inmiddels bewezen hebben!) dat $|DE|^2 + |DF|^2 = |EF|^2$. Dus we zien dat $|EF|^2 = |DE|^2 + |DF|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, dus $|EF| = |BC|$. De zijden van $\triangle DEF$ zijn dus precies net zo lang als de zijden van $\triangle ABC$. Op grond van congruentiegeval ZZZ mogen we concluderen dat $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. Daaruit volgt dat $\angle A = \angle D = 90°$, dus inderdaad is $\triangle ABC$ rechthoekig. □

11.4 Opgaven

Opgave 82. *Bekijk een driehoek $\triangle ABC$. De hoogtelijn uit A snijdt BC in D (dus $\angle ADB = 90°$), de zwaartelijn uit A snijdt BC in E (dus $|BE| = |CE|$) en de bissectrice uit A snijdt BC in F (dus $\angle FAB = \angle FAC$). Bewijs:*

(a) Als $D = E$, dan is $\triangle ABC$ gelijkbenig;

(b) Als $D = F$, dan is $\triangle ABC$ gelijkbenig.

Opgave 83. *Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn. De punten S en T liggen in het vlak zodanig dat $\triangle ABS$ en $\triangle ACT$ gelijkzijdige driehoeken zijn die $\triangle ABC$ niet overlappen. Bewijs dat $|BT| = |CS|$.*

Opgave 84. *In een rechthoekige driehoek $\triangle ABC$ met $\angle C = 90°$ ligt punt D op zijde AB zodat $\angle ADC = 90°$. Bewijs dat $|CD| = \sqrt{|AD||BD|}$.*

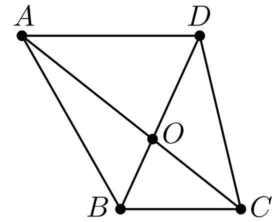
Opgave 85. *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Bewijs dat $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.*

Opgave 86 (Stelling van Thales)**.** *Bekijk een cirkel met middellijn AB en een punt C op de cirkel, ongelijk aan A en B. Bewijs dat $\angle ACB = 90°$.*

Opgave 87. *Op een gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$ zetten we aan de buitenkant gelijkbenige driehoeken $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ en $\triangle CAR$, zodat de tophoeken $\angle APB$, $\angle BQC$ en $\angle CRA$ allemaal gelijk zijn en groter dan $60°$. Bewijs dat $\triangle PQR$ gelijkzijdig is.*

Opgave 88. *Aan weerszijden van lijn AB liggen de punten C en D zodat driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle ABD$ gelijkbenig zijn met tophoeken respectievelijk C en D. Bewijs dat CD loodrecht staat op AB.*
(Uit deze opgave volgt dat de punten X waarvoor geldt dat $|AX| = |XB|$ allemaal op één lijn liggen die loodrecht staat op AB. Deze lijn heet de middelloodlijn *van het lijnstuk AB.)*

Opgave 89 (Finale 2013)**.** *Van een vierhoek $ABCD$ is BC evenwijdig aan AD en is O het snijpunt van de diagonalen AC en BD. Voor deze vierhoek geldt $|CD| = |AO|$ en $|BC| = |OD|$. Verder is CA de bissectrice van hoek $\angle BCD$ (er geldt dus $\angle BCA = \angle ACD$). Bepaal de grootte van hoek $\angle ABC$.*



12 Vierhoeken

Een *vierhoek* bestaat uit vier punten en vier zijden. We geven de punten aan met hoofdletters, waarbij je even op de volgorde moet letten: bij een vierhoek $ABCD$ kom je de punten A, B, C en D in die volgorde tegen als je een rondje loopt over de zijden. Zo'n vierhoek heeft dus zijden AB, BC, CD en DA. De *diagonalen* van de vierhoek zijn AC en BD.

Net als driehoeken hebben ook vierhoeken een vaste hoekensom: de som van de hoeken van een vierhoek is altijd gelijk aan $360°$. Dat kun je inzien door de vierhoek op te delen in twee driehoeken door één van de diagonalen te tekenen.

We bekijken een aantal speciale vierhoeken.

12.1 Trapezium

Een *trapezium* is een vierhoek met minstens één paar evenwijdige zijden. Als $ABCD$ een trapezium is met AB evenwijdig aan CD, dan zijn vanwege U-hoeken (zie opgave 69) de hoeken $\angle B$ en $\angle C$ samen $180°$. Dit geldt ook voor $\angle A$ en $\angle D$.

Andersom is het zo dat als in een vierhoek $ABCD$ geldt dat $\angle B + \angle C = 180°$, dat dan wegens U-hoeken de zijden AB en CD evenwijdig zijn. Dus we hebben de volgende equivalente definities voor een trapezium:

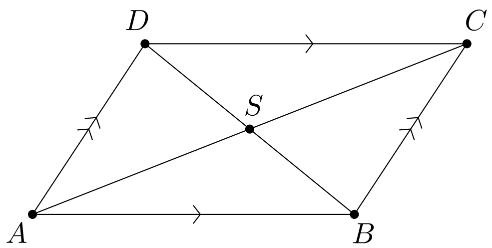
Equivalente definities 3 (Trapezium)**.** *Een trapezium is een vierhoek*

- *met een paar evenwijdige zijden;*
- *waarin er twee aangrenzende hoeken zijn die samen* $180°$ *zijn.*

Let op: een trapezium hoeft niet gelijkbenig te zijn. Met andere woorden, de twee niet-evenwijdige zijden hoeven niet even lang te zijn.

12.2 Parallellogram

Een *parallellogram* een vierhoek met twee paren evenwijdige, oftewel parallelle (vandaar de naam) zijden. Dit is dus een speciaal trapezium: eentje waarin het andere paar zijden ook evenwijdig is. Parallellogrammen hebben allerlei bijzondere eigenschappen. Het voorbeeld hieronder laat er één van zien.



Figuur 6. *Figuur bij voorbeeld 14.*

Voorbeeld 14. *Laat $ABCD$ een parallellogram zijn (zie figuur 6). Bewijs dat de diagonalen AC en BD elkaar middendoor delen (dat wil zeggen, het snijpunt van de diagonalen is het midden van lijnstuk AC en ook het midden van lijnstuk BD).*

Oplossing. Wegens Z-hoeken geldt $\angle ADB = \angle CBD$ en $\angle ABD = \angle CDB$. Omdat driehoeken $\triangle ABD$ en $\triangle CDB$ allebei zijde BD bevatten, zijn deze twee driehoeken congruent

(HZH). Hieruit volgt $|AB| = |CD|$ en $|AD| = |CB|$. (Dit is een van de andere bijzondere eigenschappen van een parallellogram: de overstaande zijden zijn even lang.) Noem S het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram. We weten al $|AD| = |CB|$ en $\angle ADS = \angle CBS$. Verder geldt vanwege overstaande hoeken dat $\angle ASD = \angle CSB$, dus we vinden de congruentie $\triangle ADS \cong \triangle CBS$ (HHZ). Hieruit volgt $|AS| = |CS|$ (dus S is het midden van AC) en $|DS| = |BS|$ (dus S is het midden van BD). Dus de diagonalen snijden elkaar middendoor. $\square$

Andersom kun je ook bewijzen dat als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, deze vierhoek een parallellogram moet zijn. Zo vinden we weer een aantal equivalente definities:

Equivalente definities 4 (Parallellogram)**.** *Een parallellogram is een vierhoek*

- *met twee paren evenwijdige zijden;*
- *met twee paren gelijke overstaande zijden;*
- *waarin twee overstaande zijden gelijk en evenwijdig zijn;*
- *waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.*

Dit zijn niet de enige equivalente definities van een parallellogram. Er mag met enige mate geschoven worden met de eigenschappen, zoals opgave 91 laat zien.

12.3 Ruit

Een parallellogram heeft twee paren gelijke zijden. Als alle vier de zijden even lang zijn, dan noemen we de vierhoek een *ruit*. Een ruit is dus een bijzonder parallellogram. We kunnen de ruit definiëren als een parallellogram met een extra eigenschap, bijvoorbeeld één van degene hieronder:

Equivalente definities 5 (Ruit)**.** *Een ruit is*

- *een vierhoek met vier gelijke zijden;*
- *een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt;*
- *parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.*

In het bijzonder geldt dus dat iedere vierhoek met vier gelijke zijden automatisch een parallellogram is.

12.4 Rechthoek

Een ander speciaal geval van een parallellogram is de *rechthoek*. Ook deze kunnen we op meerdere manieren definiëren.

Equivalente definities 6 (Rechthoek)**.** *Een rechthoek is*

- *een vierhoek met vier rechte hoeken;*
- *een parallellogram met een rechte hoek;*
- *een parallellogram met gelijke diagonalen.*

12.5 Vierkant

Ten slotte is er nog een heel bekend geval: het *vierkant*. Het is zowel een bijzondere situatie van de ruit als van de rechthoek (en dus automatisch ook van het parallellogram). Hierdoor zijn er vele manieren om het vierkant te definiëren (zie opgave 90). De meest bekende definitie is: een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.

12.6 Opgaven

Opgave 90. *Bedenk zelf minstens vier equivalente definities voor een vierkant.*

Opgave 91. *Geef bij de volgende opgaven steeds een tegenvoorbeeld of een bewijs.*

(a) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met S het snijpunt van de diagonalen. Stel dat S het midden van AC is en geldt dat AB en CD evenwijdig zijn. Is $ABCD$ een parallellogram?*

(b) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn met $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Is $ABCD$ een parallellogram?*

(c) *Laat $ABCD$ een vierhoek zijn. Stel dat de zijden AD en BC evenwijdig zijn en dat geldt $|AB| = |CD|$. Is $ABCD$ een parallellogram?*

Opgave 92. *Laat $ABCD$ een trapezium zijn met $AB \parallel CD$. Op de lijn CD ligt een punt X zodat $\angle CBX = \angle ABX$. Op de lijn AB ligt een punt Y zodat $\angle BCY = \angle DCY$. Bewijs dat de lijnen BX en CY elkaar loodrecht snijden.*

Opgave 93. *Op een cirkel met middelpunt M liggen verschillende punten A, B en P zodat AB een middellijn*[3] *van de cirkel is. Op de lijn MP ligt een punt N zodat P het midden*

[3] AB is een *middellijn* als het middelpunt van de cirkel op AB ligt.

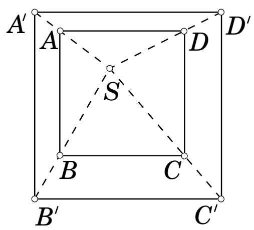
is van MN. Op de lijn door N evenwijdig aan AB liggen punten C en D zodat N het midden is van CD, $|CD| = |AB|$, en B en C aan dezelfde kant van MN liggen. Bewijs dat $ABCD$ een ruit is.

Opgave 94. *Binnen in een rechthoek $ABCD$ kiezen we een punt P. Op zijden AB, BC, CD en DA liggen respectievelijk punten K, L, M en N zodat de lijnen PK, PL, PM en PN loodrecht staan op de respectievelijke zijden. Vind alle punten P zodat $KLMN$ een ruit is.*

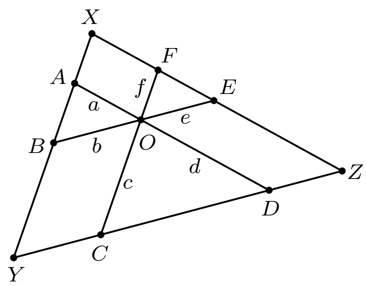
Opgave 95 (Finale 2000)**.** *Laat $ABCD$ een parallellogram zijn. Aan de buitenkant van het parallellogram wordt op zijde AB een gelijkzijdige driehoek ABP gezet, en op zijde AD een gelijkzijdige driehoek ADQ. Bewijs dat driehoek $\triangle CPQ$ gelijkzijdig is.*

13 Gemengde opgaven

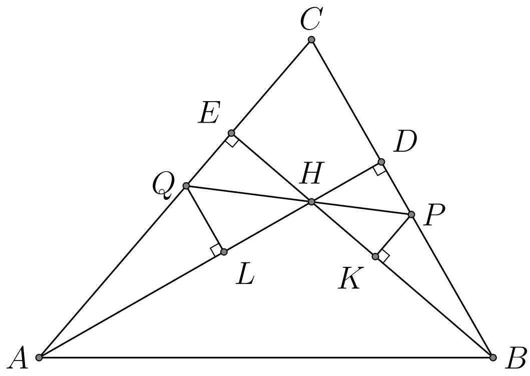
Opgave 96 (Finale 2008)**.** *Gegeven zijn twee vierkanten $ABCD$ en $A'B'C'D'$, zodat $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ en $DA \parallel D'A'$. Het vierkant $ABCD$ ligt helemaal binnen het vierkant $A'B'C'D'$. Het blijkt verder dat de lijnen AA', BB', CC' en DD' elkaar snijden in een punt S. Bewijs dat de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $A'ABB'$ en $C'CDD'$ gelijk is aan de som van de oppervlaktes van de twee vierhoeken $B'BCC'$ en $D'DAA'$.*



Opgave 97 (Finale 2010)**.** *Door een punt O in het inwendige van een driehoek XYZ gaan drie lijnen die evenwijdig zijn aan de zijden van de driehoek. Zo ontstaan op deze lijnen zes lijnstukken van O tot de zijden.*
Gegeven is dat de lengten a, b, c, d, e, f van deze lijnstukken positieve gehele getallen zijn.
Bewijs dat het product $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$ het kwadraat van een geheel getal is.



Opgave 98 (Finale 2012)**.** *Gegeven is een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ met punten D op BC en E op AC zodanig dat AD loodrecht staat op BC en BE loodrecht staat op AC. Het snijpunt van AD en BE heet H. Een lijn door H snijdt lijnstuk BC in P en snijdt lijnstuk AC in Q. Verder is K een punt op BE zodanig dat PK loodrecht staat op BE en is L een punt op AD zodanig dat QL loodrecht staat op AD.*
Bewijs dat DK evenwijdig is aan EL.



Opgave 99 (Finale 2004)**.** *Twee cirkels A en B, beide met straal 1, raken elkaar uitwendig. Vier cirkels P, Q, R en S, alle ongelijk aan A en B, en alle vier met dezelfde straal r, liggen zo dat P uitwendig raakt aan A, B, Q en S; Q uitwendig raakt aan P, B en R; R uitwendig raakt aan A, B, Q en S; en S uitwendig raakt aan P, A en R. Bereken de lengte van r.*

Opgave 100 (Finale 2009)**.** *Gegeven is een willekeurige driehoek ABC. Op de middelloodlijn van AB ligt een punt P, binnen driehoek ABC. Op zijden BC en CA worden uitwendig driehoeken BQC en CRA gezet zodanig, dat $\triangle BPA \sim \triangle BQC \sim \triangle CRA$. (Dus Q en A liggen aan weerszijden van BC, en R en B liggen aan weerszijden van AC.)*
Bewijs dat de punten P, Q, C en R een parallellogram vormen.

Opgave 101 (Finale 2006)**.** *Gegeven is een scherphoekige driehoek $\triangle ABC$. De lengten van de hoogtelijnen uit A, B en C zijn achtereenvolgens h_A, h_B en h_C. Binnen de driehoek ligt een punt P. De afstand van P tot BC is $\frac{1}{3}h_A$ en de afstand van P tot AC is $\frac{1}{4}h_B$. Druk de afstand van P tot AB uit in h_C.*

Opgave 102 (Finale 2005)**.** *Bekijk een trapezium $ABCD$ met AB evenwijdig aan CD en $|AB| > |CD|$. De diagonalen AC en BD snijden elkaar in het punt S. Het verlengde van AD snijdt het verlengde van BC in het punt T. Bewijs dat de lijn door S en T door de middens van de zijden AB en CD gaat.*

Opgave 103 (Finale 2004)**.** *Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig in een punt P. Op C_1 ligt een punt Q zodanig dat de raaklijn in Q aan C_1 de cirkel C_2 snijdt in de punten A en B. De lijn QP snijdt C_2 nog in punt C. Bewijs dat driehoek $\triangle ABC$ gelijkbenig is.*

Katern 4

Bewijsmethoden

14 Bewijs uit het ongerijmde

In katern 2 hebben we de volgende rekenregel bewezen, als onderdeel van rekenregel 4:

> Als a een deler is van m, maar niet van n, dan is a geen deler van $m + n$.

We kijken even in wat meer detail naar het bewijs van deze bewering.

Bewijs. Neem een getal m dat deelbaar is door a en een getal n dat niet deelbaar is door a. We willen nu bewijzen dat a *niet* een deler is van hun som, die we even l noemen: $l = m+n$. Stel nu eens dat a juist *wel* een deler is van l, dan is het dus een deler van zowel l als m, en dus (wegens het eerste onderdeel van rekenregel 4) ook van het verschil $l - m$. Uit $l = m + n$ volgt bovendien dat $n = l - m$. Dus a is dan een deler van n. Maar we waren juist uitgegaan van een getal n dat niet deelbaar is door a. Kortom, de aanname dat a *wel* een deler is van l kan niet juist zijn en we concluderen dat a *niet* een deler is van l. $\square$

We wilden bewijzen dat a *niet* een deler is van l. We namen even aan dat het juist *wel* zo was. Daaruit leidden we af dat het getal n, dat gekozen was als een getal dat niet deelbaar is door a, toch deelbaar was door a. Dat is natuurlijk onmogelijk. Kortom, onze aanname was onjuist.

Deze manier van redeneren kunnen we algemener toepassen. We willen bewijzen dat een of andere bewering *niet* waar is. We nemen even aan dat de bewering juist *wel* waar is en laten vervolgens zien dat dat tot iets onmogelijks leidt; we komen uit op een *tegenspraak*.

Je komt bijvoorbeeld uit op '$5 < 4$', of op '$3\frac{1}{3}$ is een geheel getal', of op '$x^2 = -5$' (voor x een reëel getal), of op '127 is even'. Stuk voor stuk uitspraken waarvan overduidelijk is dat ze niet waar zijn. Dan kunnen we daaruit concluderen dat de bewering inderdaad niet waar is.

Zo'n bewijs wordt een *bewijs uit het ongerijmde* genoemd. In plaats van direct te laten zien dat iets niet waar is, laten we zien dat het niet zo kan zijn dat het wel waar is!

Het is eigenlijk zo'n natuurlijke manier van redeneren, dat het je misschien niet eens opgevallen is dat we hem al wel eens vaker hebben toegepast. Hier een ander voorbeeld, letterlijk uit katern 2 (voorbeeld 10). Probeer te herkennen waar in de redenering de aanname wordt gemaakt die juist uiteindelijk moet worden ontkracht. En tot welke tegenspraak leidt deze aanname?

> Laat a en b twee natuurlijke getallen zijn. Noem d de grootste gemene deler van a en b. Wat is nu $\text{ggd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$?

Bewijs. We schrijven $a = d \cdot e$ en $b = d \cdot f$, met $d = \text{ggd}(a, b)$. Als we e en f in priemfactoren ontbinden, dan zitten daar geen twee dezelfde bij. Stel namelijk dat p een priemdeler zou zijn van zowel e als f, dan zou $d \cdot p$ een deler zijn van $a = d \cdot e$ en ook van $b = d \cdot f$. Maar d is de grootste gemene deler van a en b en $d \cdot p$ is groter, dus dat kan niet. Kortom, e en f hebben geen priemdelers meer gemeen. Maar dan hebben ze natuurlijk helemaal geen delers groter dan 1 meer gemeen. Dus $\text{ggd}(e, f) = 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. □

Zoals we hierboven als zeiden: in plaats van direct te laten zien dat iets *niet* waar is, laten we dus zien dat het niet zo kan zijn dat het *wel* waar is. En zo zou je ook, in plaats van direct te laten zien dat iets *wel* waar is, kunnen laten zien dat het niet zo kan zijn dat het *niet* waar is.

In katern 1 heb je gezien dat als je een bewijs met inductie doet, het een goede gewoonte is om dat aan het begin van het bewijs ook aan te kondigen: "We gaan dit bewijzen met inductie naar n". Dan weet de lezer tenminste wat voor bewijsmethode je gaat gebruiken. Zo ook: als je een bewijs uit het ongerijmde gaat geven, laat de lezer dan even weten dat je deze methode gaat toepassen; dan snapt hij/zij tenminste waarom je zo'n rare aanname doet. Hieronder geven we twee voorbeelden van bewijzen uit het ongerijmde.

Voorbeeld 15. *Bewijs dat $\sqrt{5}$ geen rationaal getal is.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat $\sqrt{5}$ wel een rationaal getal is. Dan is $\sqrt{5}$ gelijk aan $\frac{t}{n}$ voor zekere gehele getallen t en n, waarbij $n \neq 0$. Dus dan is $5 = \frac{t^2}{n^2}$, oftewel $5n^2 = t^2$. We noemen dit laatste getal

even N, dus $N = 5n^2$ maar ook $N = t^2$. Omdat $n \neq 0$ is $N = 5n^2$ een positief geheel getal en heeft het een unieke priemfactorisatie. Kijk nu naar het aantal priemfactoren 5 in N. Volgens de uitdrukking $N = 5n^2$ heeft N een oneven aantal priemfactoren 5. Maar volgens de uitdrukking $N = t^2$ heeft N juist een even aantal priemfactoren 5. Dat is in tegenspraak met elkaar. De aanname dat $\sqrt{5}$ een breuk was, kan dus niet waar zijn. Dus $\sqrt{5}$ is geen breuk. □

Voorbeeld 16. *Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Veronderstel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn, zeg k. Dan kunnen we ze ook alle k opschrijven: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$. Kijk nu eens naar dit getal:

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1.$$

Wegens die spelbreker '+1' kan dit getal niet deelbaar zijn door p_1 (omdat 1 niet deelbaar is door p_1, dus wegens rekenregel 4). En ook niet door p_2. En ook niet door p_3. Et cetera. Toch moet dit getal een priemontbinding hebben. Dus moet N een priemfactor bevatten die nog niet in ons lijstje stond. Maar dat is een beetje vreemd: ons lijstje bestond immers uit *alle* priemgetallen. We kunnen niet anders dan concluderen dat onze eerste aanname onjuist was. Er zijn dus niet maar eindig veel priemgetallen; er zijn er oneindig veel! □

Dit bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, stamt af van Euclides, een Grieks wiskundige uit de 3e eeuw voor Christus.

14.1 Opgaven

Opgave 104. *Van een geheel getal n is gegeven dat het niet deelbaar is door 3. Bewijs dat n ook niet deelbaar is door 123.*

Opgave 105. *Geef alle reële oplossingen (x, y, z) van de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (en bewijs dat er geen andere oplossingen zijn).*

Opgave 106. *Op een conferentie zijn 99 mensen. Sommige mensen schudden elkaar de hand tijdens de conferentie. Aan het eind zegt iedereen met hoeveel mensen hij handen geschud heeft. Precies 9 mensen zeggen 10 anderen de hand geschud te hebben, precies 9 mensen zeggen 11 anderen de hand geschud te hebben, enzovoorts, en precies 9 mensen zeggen 20 mensen de hand geschud te hebben. Bewijs dat minstens één iemand zich vergist moet hebben.*

Opgave 107. *Bewijs dat er geen natuurlijke getallen x en y zijn zodat $x^2 + 5x = 2y^4 + 1$.*

Opgave 108 (Finale 2007)**.** *Is het mogelijk om de verzameling* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 32, 33\}$ *op te delen in elf deelverzamelingen met elk drie getallen waarbij voor elk van de elf deelverzamelingen geldt dat één van de drie getallen gelijk is aan de som van de andere twee getallen? Zo ja, geef dan zo'n verdeling in drietallen; zo nee, bewijs dan dat het niet mogelijk is.*

Opgave 109. *Een even aantal mensen zit om een ronde tafel. Elk van hen is een ridder of een schurk. Ridders spreken altijd de waarheid en schurken liegen altijd. Aan elke persoon wordt de vraag gesteld: "Is je rechterbuurman een schurk?" Het blijkt dat de gegeven antwoorden om en om "Ja" en "Nee" zijn (dus elke persoon die "Ja" zegt heeft twee buren die "Nee" zeggen en andersom). Bewijs dat het aantal personen om de tafel een veelvoud van 4 is.*

Opgave 110. *Stel dat* a *een natuurlijk getal is zodanig dat* $\sqrt{a}$ *geen natuurlijk getal is. Bewijs dat* $\sqrt{a}$ *ook geen breuk is.*

15 Extremenprincipe

De burgemeester van het dorpje Langeland wil een nieuwe wet invoeren: voortaan moet iedere inwoner de naam kennen van een medeburger die langer is dan hijzelf (of zijzelf). Om na te gaan of zijn wet uitvoerbaar is, stuurt de burgemeester een ambtenaar langs alle deuren. De ambtenaar moet van elke inwoner de lengte opschrijven om zo te achterhalen of er wel voor elk persoon een dorpsgenoot is die langer is.

Je begrijpt natuurlijk wel dat dit niet de meest efficiënte methode is. Het is direct duidelijk dat deze wet niet uitvoerbaar is, omdat er een langste inwoner van het dorp is. Je weet misschien niet wie de langste inwoner is, maar het is zeker dat er iemand is die minstens even lang is als al zijn dorpsgenoten. (Er kunnen trouwens best meerdere inwoners zijn die allemaal de langste zijn; dan kunnen ze allemaal geen naam noemen van een langere dorpsgenoot.)

Het idee van het extremenprincipe is om naar een extreem te kijken: een langste inwoner, een kleinste getal, een grootste verzameling, noem maar op. Ook al kun je zo'n extreem niet altijd expliciet aanwijzen, je weet vaak wel dat er eentje is.

Let op: niet in alle situaties weet je dat zo'n extreem bestaat! Er is bijvoorbeeld geen grootste natuurlijk getal. In andere woorden, als de inwoners van Langeland geen mensen maar natuurlijke getallen waren geweest, dan had de burgemeester zijn wet kunnen invoeren: elk natuurlijk getal n kan een getal noemen dat groter is, bijvoorbeeld $n + 1$.

Laten we eens kijken hoe we dit principe kunnen gebruiken in wiskundige bewijzen.

Voorbeeld 17. *De burgemeester van Langeland besluit zijn wet toch in te voeren. Bovendien laat hij elke dag elke burger ondervragen; als iemand geen naam kan noemen van een* *langere dorpsgenoot, wordt hij verbannen uit het dorp. Bewijs dat uiteindelijk alle burgers verbannen worden.*

Oplossing. We bewijzen dit uit het ongerijmde.
Stel dat *niet* alle burgers verbannen worden. Dan houdt het verbannen van burgers op een zeker moment op. Noem B de groep burgers die dan nog over is. Van deze burgers wordt dus niemand meer verbannen. Er behoren eindig veel burgers tot B (en minstens één, want niet iedereen wordt verbannen volgens onze aanname), dus er is een langste burger in deze groep. De eerstvolgende dag dat hij ondervraagd wordt, kan hij geen naam noemen van een langere dorpsgenoot, dus wordt hij verbannen. Dit is een tegenspraak met de aanname dat niemand uit B nog verbannen werd. We concluderen dat er helemaal niemand overblijft. □

Hoewel het intuïtief direct duidelijk is dat alle burgers verbannen worden, is het best lastig om een bewijs op te schrijven dat echt waterdicht is. Het extremenprincipe helpt je hiermee. Zoals je ziet, wordt het bewijs met behulp van het extremenprincipe kort en is er geen speld tussen te krijgen. We bekijken nog een voorbeeld.

Voorbeeld 18. *Bij de finale van de Wiskunde Olympiade zijn 150 deelnemers. Elk van hen speelt een spelletje tegen precies twee andere deelnemers. Bewijs dat we een groep van 50 deelnemers kunnen vinden, zodat geen enkele tweetal binnen deze groep een spelletje tegen elkaar gespeeld heeft.*

Oplossing. Bekijk alle mogelijke groepen van deelnemers waarbinnen geen enkele tweetal een spelletje tegen elkaar gespeeld heeft. Neem nu de grootste groep hiervan en noem deze A. (Er is een eindig aantal deelnemers en dus kunnen we een eindig aantal groepen vormen; daarom bestaat er een grootste groep.) We bewijzen deze opgave uit het ongerijmde, dus we nemen aan dat A minder dan 50 deelnemers bevat. De deelnemers in groep A hebben wel allemaal twee keer een spelletje gespeeld, samen dus hooguit 98 spelletjes. Er zijn dus hooguit 98 deelnemers buiten groep A die al een spelletje gespeeld hebben met iemand binnen groep A. Deze deelnemers samen met groep A zijn dus hooguit 147 mensen. Er zijn dus nog zeker 3 deelnemers die niet in groep A zitten, maar ook nog geen spelletje tegen iemand uit groep A gedaan hebben. Eén van deze deelnemers kunnen we dus toevoegen aan groep A, waarbij er nog steeds binnen groep A geen spelletjes gespeeld zijn. Maar nu is groep A groter geworden, wat een tegenspraak is met de aanname dat A de grootst mogelijke groep was. Dus er bestaat een groep van minstens 50 deelnemers. □

Het is de kunst om een geschikt extreem te kiezen. In dit voorbeeld was het bijvoorbeeld niet zinvol om de deelnemer te kiezen die de meeste spelletjes gespeeld heeft (want ze hebben er allemaal precies twee gespeeld). Door de grootste groep zonder onderlinge spelletjes te kiezen, werkte het argument wel. De volgende opgaven kunnen allemaal opgelost worden met behulp van het extremenprincipe. Maar het is niet altijd makkelijk om een goed extreem te kiezen!

15.1 Opgaven

Opgave 111. *Twintig kinderen staan in een cirkel op zo'n manier dat de leeftijd van elk kind precies het gemiddelde is van de leeftijden van zijn twee buren. Bewijs dat alle kinderen even oud zijn.*

Opgave 112. *In het platte vlak zijn sommige punten rood gekleurd. Voor elk rood punt geldt dat het precies midden tussen twee andere rode punten ligt. Bewijs dat er oneindig veel rode punten zijn.*

Opgave 113. *Op een tafel liggen 4 vellen papier van verschillende vorm en grootte. Samen bedekken ze precies de hele tafel. Daarbij overlappen sommige stukken met elkaar en kunnen stukken papier ook uitsteken over de rand van de tafel. Je moet één stuk papier weghalen zodat nog ten minste driekwart van de oppervlakte van de tafel bedekt is. Lukt dat?*

Opgave 114. *Laat S een verzameling natuurlijke getallen zijn met de volgende eigenschappen:*

- *als een even getal $2n$ in S zit, dan zit n ook in S,*
- *als een getal n in S zit, dan zit $n + 1$ ook in S,*
- *het getal 2008 zit in S.*

Bewijs dat alle natuurlijke getallen in S zitten.

Opgave 115. *Een eindig aantal steden is verbonden door een aantal éénrichtingsverkeerwegen. Voor elk tweetal steden X en Y is het mogelijk om via een aantal van deze wegen van X naar Y te komen of van Y naar X te komen. Bewijs dat er een stad is die vanuit elke andere stad bereikbaar is.*

Opgave 116 (Finale 2000)**.** *Er staan vijftien spelers op een veld, elk met een bal. De afstanden tussen elk tweetal spelers zijn alle verschillend. Elke speler gooit de bal naar die speler die het dichtst bij hem staat. Bewijs dat er minstens één speler is naar wie geen bal gegooid wordt.*

Opgave 117. *Op een 8×8-schaakbord staat een aantal torens. Voor elk leeg vakje van het bord geldt: in dezelfde rij als het vakje en dezelfde kolom als het vakje staan samen minstens 8 torens. Laat zien dat er minstens 32 torens op het bord staan.*

16 Ladenprincipe

Als je 7 knikkers in 6 laatjes doet, dan weet je zeker dat er ten minste 1 laatje is met ten minste 2 knikkers erin. We kunnen dat bewijzen uit het ongerijmde: zou namelijk elk laatje ten hoogste maar 1 knikker bevatten, dan zouden er in totaal maar ten hoogste 6 knikkers in gezeten hebben; tegenspraak. Dit principe blijkt soms heel handig van pas te komen. We noemen het het *ladenprincipe*. Om het goed te kunnen toepassen, moet je meestal op een slimme manier de knikkers en de laatjes kiezen. We bekijken twee voorbeelden.

Voorbeeld 19. *Iemand heeft zes verschillende willekeurige getallen tussen de 1 en de 10 opgeschreven (waarbij 1 en 10 ook mogen). Bewijs dat hij twee buurgetallen heeft opgeschreven. (Buurgetallen zijn getallen die 1 verschillen.)*

Oplossing. We maken laden met de labels (stickers) $\{2k-1, 2k\}$ $(k = 1, \ldots, 5)$, oftewel

$$\{1,2\} \quad \{3,4\} \quad \{5,6\} \quad \{7,8\} \quad \{9,10\}.$$

Als knikkers kiezen we de opgeschreven getallen. We stoppen elk opgeschreven getal in de lade waar dat getal op het label staan. Aangezien er maar vijf laden zijn en we daar zes getallen (knikkers) over verdelen, moet er wegens het ladenprincipe na afloop ten minste één lade zijn met meer dan één getal. Dat moeten dan wel twee getallen zijn van de vorm $2k-1$ en $2k$ en dat zijn duidelijk buurgetallen. □

Voorbeeld 20. *In een zaal zit een groep van 20 mensen. Elke persoon in de groep moet op een briefje drie verschillende positieve gehele getallen schrijven, kleiner dan 10. Vervolgens moet iedereen de som van het drietal getallen bepalen. Bewijs dat er minstens twee mensen in deze groep zijn die precies dezelfde som als resultaat hebben.*

Oplossing. De laagst mogelijke som is $1+2+3 = 6$; de hoogste mogelijke $7+8+9 = 24$. De mogelijke uitkomsten voor de som zijn dus $6, 7, 8, \ldots, 23, 24$ en als we goed tellen zien we dat dat $24-6+1 = 19$ verschillende waarden zijn. Neem dit nu als laatjes. We zien de mensen nu als de knikkers en stoppen ze in een bepaald laatje afhankelijk van de som van hun getallen. Omdat we nu 20 mensen (knikkers) verdelen over 19 laatjes, moet wegens het ladenprincipe minstens één laatje dubbel bezet zijn. Oftewel: er moet minstens één waarde zijn die bij twee (of meer) mensen de uitkomst was. □

16.1 Opgaven

Opgave 118. *Amersfoort heeft 139.054 inwoners (2 mei 2008). Ieder mens heeft hooguit 100.000 haren op het hoofd. Bewijs dat er in Amersfoort zeker twee mensen zijn met hetzelfde aantal haren op hun hoofd.*

Opgave 119. *Bewijs dat in 2008 in een groepje van 15 mensen er altijd twee jongens of twee meisjes op dezelfde dag van de week jarig zijn (bijv. twee jongens op dinsdag of twee meisjes op zaterdag).*

Opgave 120. *Hoeveel torens kunnen er ten hoogste op een schaakbord staan zodanig dat geen enkele toren een andere toren kan slaan?*

Opgave 121. *Laat 51 verschillende gehele getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen).*

(a) Bewijs dat er een tweetal is met som 101.

(b) Bewijs dat er een tweetal is met verschil 50.

(c) Bewijs dat er een tweetal is waarvan de één deelbaar is door de ander.

Opgave 122. *In het vlak worden vijf roosterpunten paars gekleurd. (Een roosterpunt is een punt met gehele coördinaten.) Bewijs dat er twee paarse punten zijn zodat het lijnstuk tussen die twee punten ook door een roosterpunt (niet noodzakelijk een paars punt) heen gaat.*

Opgave 123. *Laat 15 verschillende gehele getallen gegeven zijn tussen de 1 en de 100 (waarbij 1 en 100 ook mogen). Merlijn schrijft alle mogelijke paren op van twee getallen uit deze 15 (waarbij de twee getallen in een paar ook hetzelfde mogen zijn). Vervolgens berekent hij van elk paar de som van de twee getallen. Bewijs dat Merlijn hierbij minstens twee keer dezelfde uitkomst krijgt.*

Opgave 124 (Finale 2013)**.** *Van een tabel bestaande uit n bij n vierkantjes zijn sommige vierkantjes zwart en zijn de overige vierkantjes wit. Voor ieder tweetal kolommen en ieder tweetal rijen geldt dat de vier vierkantjes op de kruisingen van die rijen en kolommen niet allemaal dezelfde kleur hebben. (De rijen en kolommen hoeven niet tegen elkaar aan te liggen; je kunt dus bijvoorbeeld ook de bovenste en onderste rij van de tabel nemen.)*
Wat is de grootst mogelijk waarde van n?

17 Gemengde opgaven

Opgave 125 (Finale 2008)**.** *Gegeven zijn 756 willekeurige verschillende gehele getallen tussen 1 en 2008 (waarbij 1 en 2008 ook mee mogen doen). Deze verzameling gekozen getallen noemen we S.*
Bewijs dat er twee verschillende gehele getallen a en b zijn in S waarvoor geldt dat $a + b$ deelbaar is door 8.

Opgave 126. *Bewijs dat de vergelijking $x^3 + x + 1 = 0$ geen rationale oplossingen heeft.*

Opgave 127. *Bij een toernooi spelen alle deelnemers precies één keer tegen elkaar, waarbij er altijd een winnaar is. Aan het eind maakt elke deelnemer een lijst met daarop*

1. *de namen van alle deelnemers die hij verslagen heeft,*
2. *de namen van alle deelnemers die verslagen zijn door iemand die bij punt 1 genoemd is.*

De deelnemers schrijven geen namen dubbel op. Bewijs dat er een deelnemer is op wiens lijst alle andere namen voorkomen.

Opgave 128 (Finale 1978). *Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking*

$$3x^2 = 9 + y^3.$$

Opgave 129 (Finale 2009). *Aan een tennistoernooi nemen minimaal drie spelers deel. Elke speler speelt precies één wedstrijd tegen elke andere speler en bovendien wint elke speler ten minste één wedstrijd van alle wedstrijden die hij speelt. (Er is bij een tenniswedstrijd altijd een winnaar en een verliezer, remise komt niet voor.)*
Bewijs dat er drie spelers A, B en C zijn waarvoor geldt: A wint van B, B wint van C en C wint van A.

Opgave 130 (Finale 2001). *Als je uit de gehele getallen 1 t/m 6003 een deelverzameling pakt van 4002 getallen, dan is er binnen die deelverzameling altijd weer een deelverzameling van 2001 getallen te vinden met de volgende eigenschap:*
als je de 2001 getallen ordent van klein naar groot, dan zijn de getallen afwisselend even en oneven (of oneven en even).
Bewijs dit.

Opgave 131 (Finale 1995). *We beschouwen de rijtjes $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ van dertien gehele getallen die in oplopende volgorde staan, dus $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{13}$. Zo'n rijtje heet "tam" indien voor iedere i met $1 \leqslant i \leqslant 13$ geldt: als je a_i uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is.*

(a) Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even of geheel uit oneven getallen bestaat.

Een tam rijtje heet "turbo-tam" als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.

(b) Bewijs dat in ieder turbo-tam rijtje alle getallen gelijk zijn.

Opgave 132 (Finale 1977). *Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal (minstens één) kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.*