De Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) is met bijna 600 deelnemers uit meer dan 100 landen de grootste wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren. Elk land vaardigt haar zes beste leerlingen af naar deze wedstrijd, die dit jaar in Thailand werd gehouden. De deelnemers kregen verspreid over twee dagen negen uur de tijd om zes vraagstukken op te lossen. Dirk van Bree, een van de leerlingen van het Nederlandse team, vertelt over zijn ervaringen met de eerste opgave.

■ door Dirk van Bree

EXCENTRIEKE VERZAMELINGEN

Thailand is een leuk land. Je hebt tempels, mooie bossen en een heleboel olifanten. En afgelopen zomer ook nog eens zes moeilijke wiskundeproblemen. Mijn favoriete opgave ging over evenwichtige en excentrieke verzamelingen van punten in een vlak.

Opgave 1 (IMO 2015). We noemen een eindige verzameling $\boldsymbol{S}$ van punten in het vlak *evenwichtig* als er voor elk tweetal verschillende punten A en B in $\boldsymbol{S}$ een punt C in $\boldsymbol{S}$ is zodanig dat $|AC| = |BC|$. We zeggen dat $\boldsymbol{S}$ *excentriek* is als er voor elk drietal verschillende punten A, B en C in $\boldsymbol{S}$ geen punt P in $\boldsymbol{S}$ is zodanig dat $|PA| = |PB| = |PC|$.

a. Bewijs dat er voor alle gehele getallen $n \geq 3$ een evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

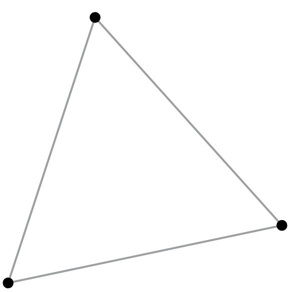
b. Bepaal alle gehele getallen $n \geq 3$ waarvoor er een excentrieke evenwichtige verzameling bestaat die precies n punten bevat.

Je ziet, in deze opgave worden twee nieuwe woorden geïntroduceerd: *evenwichtig* en *excentriek*. We bedenken zelf ook nog een nieuw woord: als geldt dat $|AC| = |BC|$, dan noemen we C een *evenwichtspunt* van A en B. Een evenwichtige verzameling is dus een verzameling waarbij voor elke twee punten een evenwichtspunt bestaat dat ook in de verzameling zit.

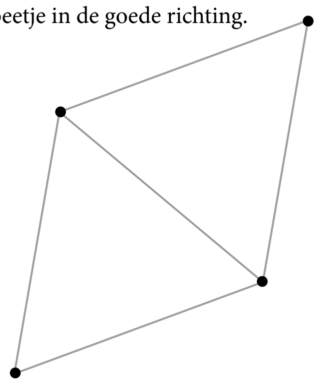
VRAAG A Laten we eerst eens kijken of we überhaupt een evenwichtige verzameling kunnen bedenken, bijvoorbeeld een evenwichtige verzameling met 3 punten. Die is niet al te moeilijk: de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek voldoen (zie figuur 1). Er geldt namelijk dat voor elk tweetal punten het derde punt een evenwichtspunt is. Dit is waar, omdat alle zijden van de driehoek even lang zijn.

Voor 4 punten dan? Na wat gepruts heb ik het volgende gevonden: plak twee gelijkzijdige driehoeken bij een zijde aan elkaar (zie figuur 2). Het is makkelijk controleerbaar dat welke twee punten je ook kiest, er een derde evenwichtspunt bestaat.

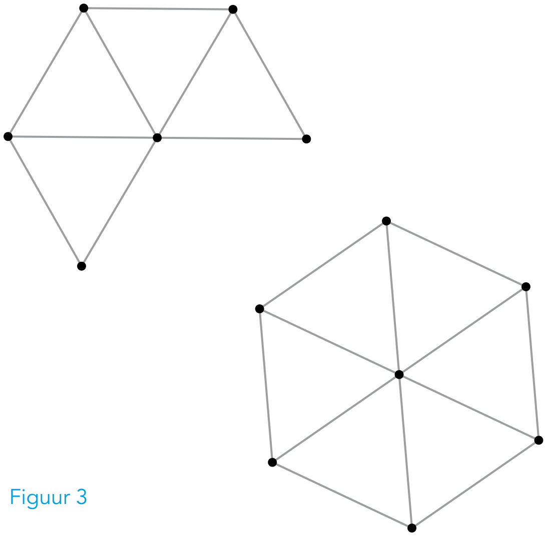
Met 5 punten? Misschien is het leuk die eerst zelf te proberen. De voorbeelden sturen je misschien een beetje in de goede richting.



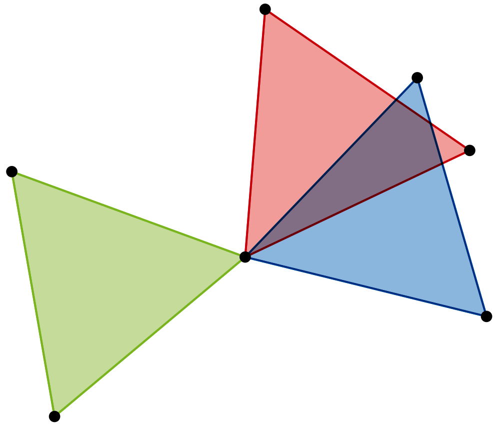
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

Gelukt? Er zijn meerdere oplossingen mogelijk. De eerste configuratie bestaat uit de vijf hoekpunten van een regelmatige vijfhoek. De tweede bestaat uit de hoekpunten van drie aan elkaar geplakte gelijkzijdige driehoeken.

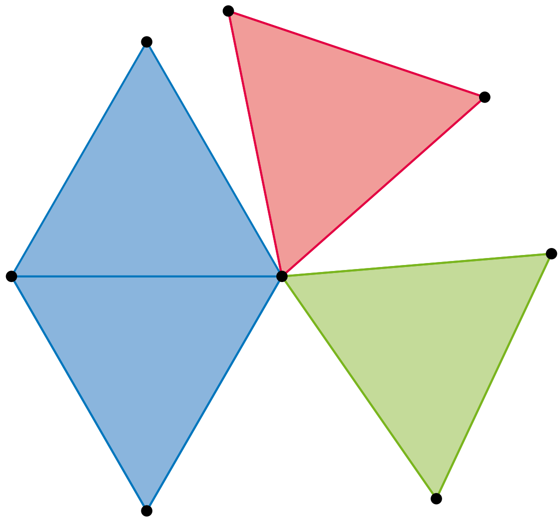
Ook voor 6 en 7 punten vinden we een oplossing met gelijkzijdige driehoeken (zie figuur 3). Als je extra lang doorzoekt, kom je er misschien ook nog achter dat een regelmatige zeshoek niet voldoet, maar een zevenhoek wel.

Voor 8 punten hebben we nu een probleem. We hebben geen ruimte meer om een driehoekje aan te plakken: de cirkel is al vol. Ook een regelmatige achthoek werkt niet; twee buren hebben geen evenwichtspunt. Nu komt de clou van vraag a: we moeten wel gelijkzijdige driehoekjes aan elkaar plakken, maar dat hoeft helemaal niet op deze manier. Als we nu allemaal even grote gelijkzijdige driehoeken aan elkaar plakken, zodat ze allemaal een hoekpunt O gemeen hebben? De driehoeken mogen geen zijden gemeenschappelijk hebben. Als we k driehoeken op deze manier aan elkaar plakken, krijgen we $2k + 1$ punten: we hebben het gemeenschappelijke punt, en daarnaast heeft elk driehoekje nog twee andere punten. Figuur 4 toont een configuratie met drie driehoeken en 7 punten. Waarom zou deze constructie werken? We controleren de 'evenwichtsvoorwaarde'. Stel dat we twee punten hebben, die beide niet het gemeenschappelijke punt O zijn. Dan is O een evenwichtspunt van deze twee punten, want de afstanden tot O zijn de zijden van één gelijkzijdige driehoek, en alle driehoeken zijn even groot. Stel dat we O en een ander punt kiezen. Dan zitten die twee punten in een gelijkzijdige driehoek. Nu is natuurlijk het derde punt in die gelijkzijdige driehoek een evenwichtspunt van deze twee punten. We zijn nu klaar voor oneven n.

Voor even n kunnen we iets vergelijkbaars doen. We zorgen dan dat precies twee van de driehoeken die we aan elkaar plakken, een zijde gemeen hebben. Dan verdwijnt er een punt, want die twee driehoeken dragen (naast O) nu nog maar 3 punten bij, in plaats van 4. Op deze manier kunnen we voor $k \geq 2$ een evenwichtige verzameling van $2k$ punten maken, zoals het plaatje met 8 punten in figuur 5. De reden dat deze configuratie evenwichtig is, is precies dezelfde als die voor oneven n.

VRAAG B In een excentrieke verzameling kunnen we geen cirkel vinden zodat onze verzameling zowel het middelpunt van deze cirkel als drie punten op deze cirkel bevat. Als we terugkijken naar vraag a, dan zien we dat in onze oplossing dat juist wél kon: het gemeenschappelijke punt O is eigenlijk het middelpunt van een cirkel waar alle andere punten op liggen. We moeten dus een nieuwe constructie bedenken, of bewijzen dat het onmogelijk is voor bepaalde n. Dat is lastiger: in plaats van een voorbeeld construeren moeten we dan iets bewijzen over *alle* mogelijke configuraties.

Maar we hadden nóg wat oplossingen gevonden. Voor 3, 5 en 7 punten wisten we al dat een regelmatige veelhoek ook voldeed. Zou dit ook werken voor grotere oneven n? Dit blijkt inderdaad zo te zijn: als je twee punten kiest, dan verdelen we de n-hoek in twee bogen. Op een van deze bogen ligt nu een oneven aantal punten. Als we op die boog het middelste punt kiezen, wat kan omdat er een oneven aantal op ligt, dan is dat punt een evenwichtspunt van de twee gekozen punten. Daarnaast kunnen we natuurlijk nooit een cirkel tekenen rond een van de punten zodat er drie punten op die cirkel liggen: als we al een cirkel hebben die door drie van de punten gaat, dan weten we dat het middelpunt



Figuur 5

precies het centrum van de n-hoek moet zijn, en die zit niet in onze verzameling. Een misschien nog wel snellere controle levert ook op dat de regelmatige veelhoek niet voldoet bij even n: twee buren hebben dan nooit een evenwichtspunt.

Laten we eens proberen om een evenwichtige excentrieke verzameling te maken met 4 punten erin. Stel dat we A en B kiezen, dan kunnen we aannemen dat C het evenwichtspunt van die twee is, dus er geldt $|AC| = |BC|$. Maar als we nu A en D kiezen, dan kan C niet het evenwichtspunt zijn, want dan zou gelden $|DC| = |AC| = |BC|$ en dan is de verzameling niet excentriek. Dus er moet gelden dat B het evenwichtspunt is, want dat is de enige andere mogelijkheid. Dus er geldt $|DB| = |AB|$. Op dezelfde manier kan C niet het evenwichtspunt van B en D zijn, dus is A dat en er geldt dat $|BA| = |DA|$ en dat driehoek ABD gelijkzijdig is. Maar als we nu C en D kiezen, dan moet óf A óf B het evenwichtspunt zijn. In het eerste geval geldt dan $|CA| = |DA| = |BA|$, en in het tweede geval geldt $|BA| = |BD| = |BC|$. In beide gevallen is onze verzameling dus niet excentriek. We kunnen nu concluderen dat er geen evenwichtige excentrieke verzamelingen met 4 punten bestaan.

Wat kunnen we uit het bewijs hierboven halen? We hebben de volgende truc een paar keer gebruikt: als we twee paren punten hebben, die één punt overlappen, dan kunnen die paren niet hetzelfde evenwichtspunt hebben. Dit is omkeerbaar: als twee paren punten wel hetzelfde evenwichtspunt hebben, dan kunnen ze geen punt gemeen hebben.

Dit gegeven over evenwichtige excentrieke verzamelingen gaan we gebruiken door te kijken naar alle mogelijke paren punten. Er zijn $\frac{1}{2}n(n-1)$ mogelijke paren: we hebben n mogelijkheden voor het eerste punt, $n-1$ voor het tweede, maar omdat we alle paren dan dubbel tellen, moeten we $n(n-1)$ nog delen door 2. We kijken nu naar het punt X dat het vaakst een evenwichtspunt van een paar is. Het is duidelijk dat X het evenwichtspunt van minstens $\frac{1}{2}(n-1)$ paren is. Maar n is even, dus $\frac{1}{2}(n-1)$ is geen geheel getal. We mogen nu dit getal naar boven afronden, en we komen erop uit dat X het evenwichtspunt van minstens $\frac{1}{2}n$ paren is. We hadden hierboven gezien dat alle punten in deze paren verschillend moeten zijn. Dus in deze paren zitten minstens n verschillende punten. Maar we hebben in totaal slechts n verschillende punten! Dus X zit zelf ook tussen de n punten. Dit kan natuurlijk niet, want een punt kan nooit een evenwichtspunt zijn van een paar waar dat punt zelf bij in zit. We kunnen nu dus concluderen dat er voor even n geen enkele evenwichtige excentrieke verzameling bestaat.

Hiermee is ook vraag b opgelost. Alleen voor oneven n bestaat er een evenwichtige excentrieke verzameling.

DRIE KEER BRONS Waarom was deze opgave mijn favoriet? Omdat het redeneren aan de hand van plaatjes tekenen gewoon heel leuk is. Nog leuker was, dat achteraf bleek dat Merlijn Staps, een van onze begeleiders, de opgave had bedacht.

Toen ik de opgave voor het eerst zag – op de eerste wedstrijddag dus – kon ik hem bijna helemaal oplossen. Ik miste alleen de regelmatige veelhoeken bij oneven n. Dat was genoeg voor 6 van de 7 punten, maar helaas net niet genoeg voor een eervolle vermelding, die je krijgt als je een opgave helemaal oplost. Desondanks was het voor mij een geslaagde IMO. En ook voor ons land: het Nederlandse team veroverde drie bronzen medailles. ■