TORENS NAAST DE TAFELBERG

Tysger Boelens

OPGAVE 2 VAN IMO2014

Van 6-13 juli 2014 vond in Kaapstad, Zuid-Afrika de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Het Nederlandse team deed het hier beter dan ooit tevoren. Bronswinnaar Tysger Boelens, inmiddels student wiskunde in Groningen, bespreekt in dit artikel een toegankelijke, maar toch pittige, opgave van deze wedstrijd.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Toen ik in januari 2010 als tweedeklasser in een lokaal ergens in Zuid-Groningen een paar vragen over wiskunde maakte, had ik niet kunnen vermoeden dat dat er toe zou leiden dat ik, viereneenhalf jaar later 10.000 kilometer verderop in een bodywarmer en met twee truien aan, mee zou doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade (die onder de Engelse afkorting IMO bekend staat).

Meedoen aan de training

Om daar te komen is er een trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, dat ook dient als voorbereiding op de andere internationale wiskundewedstrijden. Tijdens de maandelijkse trainingsweekenden en -dagen doe je tot wel drie trainingssessies van 3,5 uur per dag. Tijdens zo'n sessie ben je, na een kort stukje theorie, voortdurend bezig met opgaven oplossen, slechts onderbroken door een kwartiertje pingpong of volleybal. Als kers op de taart is er elke week huiswerk: vier opgaven die je moet oplossen en uitgewerkt naar een trainer sturen. De training heeft natuurlijk ook een informele kant: je komt een heleboel mensen tegen die een passie voor wiskunde (en een bepaald gevoel voor humor) delen en die het ook gaan studeren, al studeren of gestudeerd hebben.

Meedoen aan de IMO

Het vierde jaar dat ik in de selectie zat, lukte het: op 7 juni 2014 werd in een zaaltje vol met ouders bekendgemaakt dat ik in het IMO-team voor Zuid-Afrika zat. Nadat ik op de valreep nog de benodigde inentingen had gekregen, was het dan zover: op naar Afrika! In de drie weken tussen de teambekendmaking en het opstijgen van vlucht KL597 naar Kaapstad werd uiteraard gewoon doorgetraind met oefenwedstrijden, maar niet alleen dat: alle olympiadeteams werden ook gehuldigd door staatssecretaris Dekker *himself*.
Nadat we een kwart van de wereld waren overgevlogen (natuurlijk niet zonder in de lucht te trainen) kwamen we aan in Kaapstad. Eerst werden we in een luxehotel een week lang getraind door onze drie begeleiders. Helaas kwam aan het goede leven van driegangendiners snel een eind: de eigenlijke IMO, die een paar kilometer verderop op de campus van de plaatselijke universiteit werd gehouden, was een stuk minder comfortabel: er was bijvoorbeeld geen verwarming, terwijl het 's nachts maar vijf graden was. Maar dat zijn maar details: het mooiste van de IMO is eigenlijk niet de wedstrijd, maar al die andere teams die er zijn. Het is een heel bijzondere ervaring om met leeftijdsgenoten uit de hele wereld te klaverjassen en te weerwolven, terwijl je ook nog eens een heel nieuw werelddeel te zien krijgt.

De opgave

Opgave 2 van de IMO ging over borden van n bij n vakjes, waarbij op bepaalde vakjes torens staan. De torens staan zo op het bord dat er in elke rij precies één toren staat, en in elke kolom precies één. We definiëren een *vrij vierkant* als een vierkant van vakjes op het bord waarin geen torens staan. We zijn nu op zoek naar de grootste $k(n)$ zodat er op zo'n bord van n bij n met n torens altijd een vrij vierkant van zijde $k(n)$ te vinden is. In de praktijk betekent dit: zoek een formule voor $k(n)$ die afhangt van n.

De weg naar het juiste vermoeden

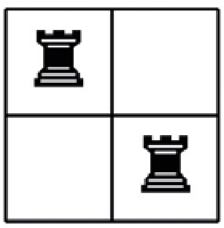
Dankzij de training is het eerste wat bij je opkomt bij elke opgave: 'kleine gevallen'. Het idee hierachter is dat je meteen gevoel voor de opgave krijgt, en dat als je een patroon in de oplossingen ziet, je meteen kunt proberen of je dit patroon als geheel kan bewijzen. Hier betekent dat dus dat we de gezochte $k(n)$ gaan bepalen voor $n = 2$ en dan voor $n = 3$, enzovoort, net zo lang tot we iets interessants zien.
$n = 2$: Het is duidelijk dat de torens op de diagonaal moeten staan, zoals in figuur 1. Nu is er altijd een leeg vakje en geen leeg 2×2-vierkant. Dus $k(1) = 1$.
$n = 3$: Er zijn hier twee 'echt verschillende' mogelijkheden (je kunt alle mogelijke 3×3-borden door spiegelen en draaien in deze veranderen), namelijk die van figuur 2 en figuur 3. In geen van beiden is ergens een vrij 2×2-vierkant, dus we concluderen $k(2) = 1$.
$n = 4$: Terwijl we wat 4×4-borden bekijken, valt ons op dat op alle borden die we proberen vrije 2×2-vierkanten te vinden zijn. Dit geldt ook voor het bord waarbij de torens op een diagonaal staan (figuur 4). Er bestaan veel combinatoriekproblemen waarbij een minimale of

maximale waarde van een heleboel situaties berekend moet worden. Er moet dan ook worden aangetoond dat die waarde daadwerkelijk bereikt wordt. Meestal is dat dan in een 'mooi' geval, dat regelmatig en symmetrisch is.
Het zou dus kunnen zijn dat in deze opgave het randgeval het bord is met alle torens op de diagonaal. Als dat zo is, kunnen we $k(n)$ makkelijk berekenen. Het grootste vrije vierkant in deze situatie heeft een zijde van ongeveer $n/2$ (zie figuur 5). Door apart te kijken naar oneven n en even n zien we dat in dit geval zou gelden: $k(n)$ is het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan $n/2$.
Vervolgens proberen we dit te bewijzen, maar helaas gooit de werkelijkheid roet in het eten: zie figuur 6. Daaruit blijkt dat $k(4) = 1$ en geen 2. Dit is natuurlijk vervelend: nu moeten we op zoek naar een nieuw vermoeden. Om het makkelijker te maken patronen te herkennen, zetten we de waarden van $k(n)$ die we hebben gevonden in een tabel:

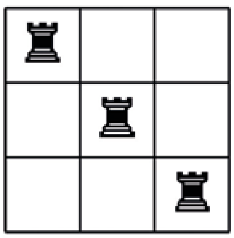
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k(n)$	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3

Het wordt duidelijk dat $k(n)$ heel langzaam stijgt. Het is dus niet zo waarschijnlijk dat $k(n)$ op een lineaire manier afhangt van n. Op basis van bijvoorbeeld het patroon in figuur 6 zien we dat een soort scheef raster van torens (als in figuur 7) ervoor zorgt dat er geen lege vierkanten met een zijde van ongeveer $\sqrt{n}$ zijn. We formuleren dit nieuwe vermoeden preciezer:
$k(n) = m$ voor $m^2 + 1 \leq n \leq (m + 1)^2$.
Nu zijn er ruwweg twee dingen die we moeten laten zien:
- dat we bij $m^2 \times m^2$-vierkanten daadwerkelijk de torens zo 'vervelend' neer kunnen zetten dat het onmogelijk is om een vrij $m \times m$-vierkant te vinden,
- en dat het bij vierkanten met een zijde groter dan m^2 altijd mogelijk is om een vrij $m \times m$-vierkant te vinden.

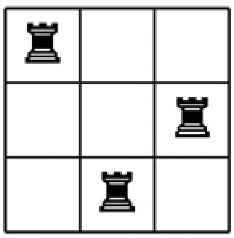
Het eerste is een constructie, het tweede een bewijs.
We zullen de constructie bekijken aan de hand van het concrete geval $m = 3$.



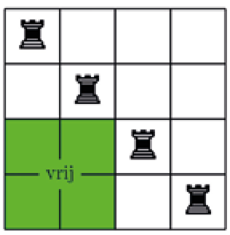
figuur 1



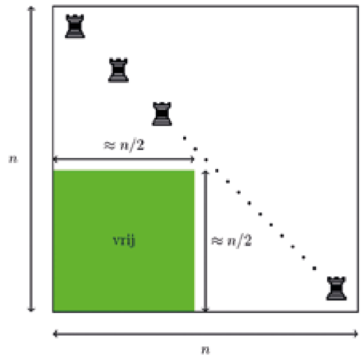
figuur 2



figuur 3



figuur 4



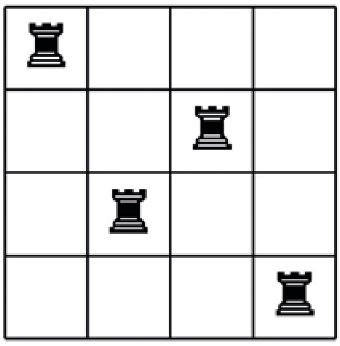
figuur 5

De constructie

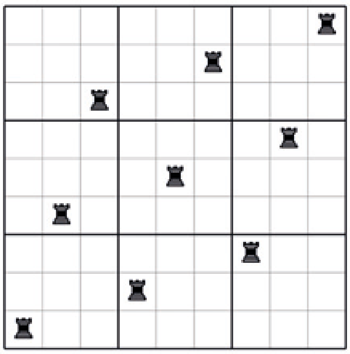
In figuur 7 is de vervelende verdeling voor $m = 3$ te zien. Deze komt als volgt tot stand:
We verdelen het (grote) $m^2 \times m^2$-vierkant in (kleine) $m \times m$-vierkanten (aangeven door zwarte lijnen). In elk kleiner vierkant plaatsen we precies één toren. De plek van de toren in het kleine vierkant correspondeert met de plek van het kleine vierkant in het grote vierkant: als we een klein vierkantje naar rechts gaan, gaat de toren een vakje omhoog, en als we een klein vierkantje omhoog gaan, gaat de toren een vakje naar rechts. Zo ontstaat het scheve raster, en het is intuïtief duidelijk dat er in elke rij en elke kolom maar één toren staat. Iets minder duidelijk is het dat er nu geen vrij $m \times m$-vierkant meer is. Aantonen dat deze constructie inderdaad aan alle gestelde eisen voldoet, is een tamelijk technische aangelegenheid, dus dat werken we hier niet uit.

Het bewijs

We willen bewijzen dat er altijd een vrij vierkant is van zijde m als de zijden van het schaakbord minstens $m^2 + 1$ lang zijn. Dit doen we met een bewijs uit het ongerijmde: we nemen aan dat het niet waar is, om hier vervolgens een tegenspraak uit af te leiden. Omdat onze aanname leidt tot onzin, moet het tegendeel wel waar zijn. In dit geval nemen we aan dat er geen vrije vierkanten van zijde m zijn in zo'n schaakbord met zijde van minstens $m^2 + 1$. (En we bekijken weer het geval $m = 3$.) We hebben dus een schaakbord met een zijde van 10 of groter. We weten dat op elke rij een toren staat, dus ook op de onderste rij. Recht boven die toren op de onderste rij passen minstens drie 3×3-vierkanten door onze aanname over het formaat van het schaakbord. Omdat deze drie vierkanten niet vrij zijn, staat in elk daarvan minstens een toren.
In de drie kolommen die deze torens delen, staan dus minstens drie torens. Maar we weten dat in elke kolom precies een toren staat. Dus in de drie 3×3-vierkanten alleen staan al alle torens die in totaal in de 3 kolommen staan. Maar ondertussen hadden we aangenomen dat in deze kolommen in de onderste rij (dus onder deze drie vierkanten) ook nog een toren stond. Dit is een tegenspraak, dus onze aanname is onwaar: er moet ergens een vrij vierkant van zijde 3 zijn. Het bewijs voor algemene m gaat precies hetzelfde.



figuur 6



figuur 7

Afsluiting

Tijdens de IMO had ik zelf een iets ingewikkelder bewijs voor het tweede deel gevonden, en heb ik alleen een schets gemaakt van de constructie van een 'vervelende' verdeling. Ik heb uiteindelijk vijf van de zeven punten voor de opgave gekregen (dit betekent: opgelost, maar met grote gaten in het bewijs). Uiteindelijk heb ik nog dertien punten gescoord op de overige vijf opgaven, en hiermee een bronzen medaille verdiend. Al met al kan ik met mooie herinneringen en veel tevredenheid terugkijken op de IMO.

Over de auteur

Tysger Boelens nam als vwo-scholier van RSG Ter Apel vier jaar lang deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. In 2014 maakte hij deel uit van het Nederlandse team voor de Internationale Wiskunde Olympiade. Nu studeert hij wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *t.y.m.boelens@rug.nl*