In april dit jaar werd voor de vierde keer de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) gehouden. Het evenement vond plaats in Minsk in Wit-Rusland. Nederland werd vertegenwoordigd door een team van vier meisjes. Een van de teamleden, Eva van Ammers, vertelt in dit artikel over opgave 2 van deze wedstrijd.

■ door Eva van Ammers

DOMINO DAY OP EEN SCHAAKBORD

De EGMO bestaat uit twee wedstrijddagen met ieder drie opgaven. Hoewel ik de EGMO in zijn geheel geweldig vond, waren naar mijn mening de wedstrijddagen met de wiskunde toch wel het leukst. Een van de zes opgaven die we voor onze kiezen kregen, luidde:

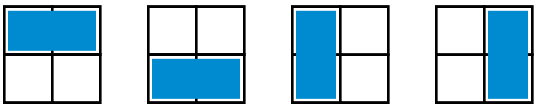
Opgave 2 (EGMO 2015). Een domino is een 2×1- of 1×2-tegel. Bepaal op hoeveel manieren precies n^2 domino's zonder overlap op een $2n \times 2n$-schaakbord kunnen worden geplaatst zodat elk 2×2-vierkant minstens twee onbedekte eenheidsvierkantjes bevat die in dezelfde rij of dezelfde kolom liggen.

Om een idee te krijgen op hoeveel manieren dit kan, proberen we een aantal kleine gevallen uit, te beginnen met $n = 1$. Dit geval is goed te doen: de dominosteen kan bovenin, onderin, links of rechts liggen, dus er zijn 4 mogelijkheden (zie figuur 1). Voor $n = 2$ verschijnen er al heel wat meer schaakborden, waarvan er een paar zijn uitgetekend in figuur 2; in totaal zijn het er 36. Als er voor $n = 2$ al zo veel borden zijn, is het vermoedelijk voor $n = 3$ al niet haalbaar om in de beschikbare tijd de boel volledig uit te werken.

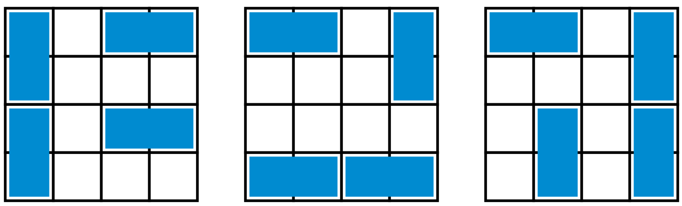
Gelukkig zien we bij $n = 2$ wel al iets dat opvalt: als we het bord horizontaal en verticaal doormidden delen, zodat er vier 2×2-vierkanten ontstaan, ligt in elk van deze vier vakken precies één hele dominosteen. Zoiets zou wel eens in het algemeen kunnen gelden. We bekijken daarom toch een paar schaakborden van 6×6 en dan blijkt inderdaad ook steeds één dominosteen in één van de negen 2×2 vierkanten te liggen (zie figuur 3).

We zullen vanaf nu met 'groot schaakvak' deze 2×2-vierkanten aanduiden. (Er zijn nog meer 2×2-vierkanten, bijvoorbeeld het vierkant dat je krijgt door een groot schaakvak een hokje te verschuiven. Deze vierkanten noemen we geen grote schaakvakken, maar spelen wel nog een rol in de opgave.)

We vermoeden dus dat in elk groot schaakvak precies één domino ligt. Maar kunnen we dit ook bewijzen? Omdat er n^2 domino's zijn en elke domino 2 vakjes bedekt, worden er in totaal $2n^2$ vakjes

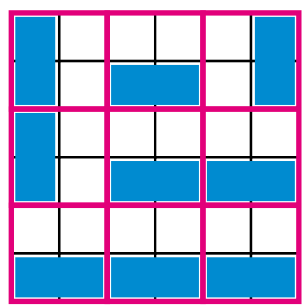


Figuur 1 Alle mogelijkheden voor $n = 1$.

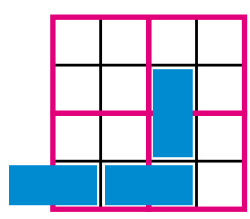


Figuur 2 Een aantal mogelijkheden om de domino's te plaatsen. Merk op dat er in elk 2×2-vierkant minstens twee onbedekte eenheidsvierkantjes zijn die in dezelfde rij of dezelfde kolom liggen.

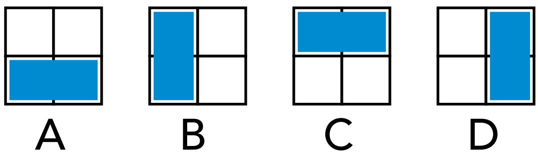
van 1 bij 1 bedekt door dominostenen. Er zijn ook n^2 grote schaakvakken, want een groot schaakvak is 2×2 en het bord heeft zijden van $2n$. In elk groot schaakvak mogen, aangezien elk groot schaakvak in het bijzonder een 2×2-vierkant is, maximaal twee vakjes in totaal worden bedekt, en omdat er in totaal $2n^2$ vakjes worden bedekt, moeten in elk schaakvak *precies* twee vakjes worden bedekt door een domino. Dit gaat al de goede kant op, maar nu zou het nog steeds mogelijk zijn dat de twee vakjes in een groot schaakvak worden bedekt door verschillende domino's. Dan geldt echter voor het groot schaakvak dat ernaast zit dat hier ook twee vakjes bedekt zijn, dus dan hebben we twee opties voor de volgende dominosteen: deze het hoekje om laten gaan of deze in het verlengde van de vorige steen leggen. Als we een hoekje maken van dominostenen, zijn echter in een 2×2-vierkant drie vakjes bedekt (zie figuur 4) en dit kan niet, dus we leggen deze dominosteen in het verlengde van de vorige steen. Dan doen we dit ook weer voor het volgende grote schaakvak, en dat daarna, en dat daarna... Maar dan hebben we wel een probleem als we bij de rand komen. Dan kunnen we niet nog een



Figuur 3



Figuur 4

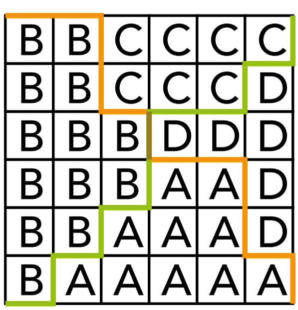


Figuur 5

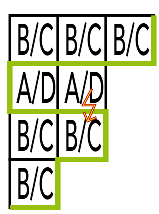
nieuwe domino in het verlengde leggen, dus is er maar één vakje bedekt in dit grote schaakvak, en dit kan niet. Kortom, alleen maar problemen, maar dit zijn wel voldoende problemen om te concluderen dat in elk groot schaakvak precies één domino ligt.

Dus we hebben nu vier mogelijke grote schaakvakken waaruit het bord is opgebouwd. Voor het gemak noemen we ze A, B, C en D (zie figuur 5). Deze grote schaakvakken kunnen niet op elke mogelijke manier naast elkaar liggen. Een B rechts van een D levert bijvoorbeeld een 2 × 2-vierkant op waar alle vakjes zijn bedekt met een domino, en een A en een C naast elkaar levert een 2 × 2-vierkant op waarin weliswaar twee vakjes onbedekt zijn, maar deze liggen niet in dezelfde rij of kolom, dus dit kan ook niet. Soms zijn er meerdere opties voor wat er naast een groot schaakvak kan. Rechts van een B kunnen zowel een A als een C als een D, maar links van een B kan alleen nog een B. En links van die B kan weer alleen maar een B. Dus als er ergens in een rij een B ligt, liggen daar links van alleen maar nog meer B's. Voor de A, C en D kunnen we net zo'n redenering uitvoeren. Rechts van een D kunnen in een rij alleen maar D's liggen, boven een C kunnen in een kolom alleen maar C's liggen en onder een A kunnen in een kolom alleen maar A's liggen.

GRENSLIJNEN Nu we meer grip hebben op hoe het bord wordt ingedeeld, is de vraag: kunnen we uitrekenen op hoeveel manieren dit kan? Allereerst proberen we eens een bord te vormen met



Figuur 6



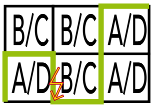
Figuur 7

de informatie die we nu hebben (zie figuur 6). Het leuke is, dit bord bestaat nu uit vier zones met dezelfde letters en om het onszelf makkelijker te maken, hebben we ook grenslijnen getekend. De ene lijn scheidt de B's en C's van de A's en D's en de andere lijn scheidt de A's en B's van de C's en D's. We zouden nu ook een bord kunnen indelen door juist eerst de grenslijnen te tekenen en daarna de A's, B's, C's en D's in te vullen. Dan is het wel handig om te weten aan welke eigenschappen de grenslijnen moeten voldoen om hiermee een goed bord te krijgen. Een van de eigenschappen die de grenslijnen lijken te hebben, is dat de grenslijn die linksonder begint alleen naar rechts en naar boven gaat, tot deze helemaal rechtsboven is, en evenzo lijkt te gelden dat de grenslijn die rechtsonder begint alleen naar links en naar boven gaat.

We kunnen laten zien dat bovenstaande het geval is. We bekijken een grenslijn tussen de zone met alleen B's en C's en de zone met alleen A's en D's. Deze begint linksonder, maar stel nu dat we op een bepaald moment de grenslijn een stukje naar links laten bewegen in plaats van naar rechts of naar boven. Dan komt er een A of D boven een B of C te liggen, zoals te zien is in figuur 7, maar dit kan niet. Als de grenslijn op een plek naar beneden gaat, komt er een B of C rechts van een A of D te liggen, zoals in figuur 8, en dit kan ook niet. Dus de grenslijn die linksonder begint, kan alleen naar boven en naar rechts bewegen. Evenzo kan de grenslijn die rechtsonder begint alleen naar boven en naar links bewegen.

Dus de lijn beweegt vanaf de hoek linksonder alleen naar boven en naar rechts totdat deze in de hoek rechtsboven is, en aangezien de lijn langs n grote schaakvakken omhoog gaat en langs n grote schaakvakken naar rechts, gaat de lijn langs $2n$ zijkanten van grote schaakvakken. Als we dit zien als een stappenplan dat bestaat uit n keer naar rechts en n keer naar boven, is het aantal stappenplannen gelijk aan het aantal manieren waarop we de n keer naar rechts kunnen plaatsen in dit stappenplan van $2n$ stappen, en dit is gelijk aan $\binom{2n}{n}$. Er zijn evenzo $\binom{2n}{n}$ opties om een grenslijn van rechtsonder naar linksboven te trekken. Omdat we in de vorige alinea hebben vastgesteld dat er op geen enkele andere manier een grenslijn getrokken kan worden, hebben we alle opties gehad waarop we deze twee grenslijnen kunnen trekken, en weten we dat er $\binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2$ manieren zijn waarop we de grenslijnen kunnen trekken.

Nu is de vraag, voldoet elk bord waarvoor we deze grenslijnen zo trekken? Als we de grenslijnen zo trekken, kunnen alleen bepaalde grote schaakvakken op bepaalde manieren naast elkaar komen. Schaakvakken van hetzelfde type kunnen op elke manier naast elkaar: zo kunnen twee A's zowel naast elkaar als boven elkaar, dus dit gaat goed. Verder komen met deze grenslijnen de volgende mogelijkheden voor: een A onder een B, C of D, een B links van een A, C of D, een C boven een A, B of D en een D rechts van een A, B of C, en dit mag allemaal. Dus het op deze manier ingevulde bord voldoet inderdaad.



Figuur 8

TOT SLOT Zelf vond ik dit een pittige opgave, aangezien je heel veel verschillende dingen moest bedenken wat betreft de voorwaarden van het neerleggen van de domino's en het heel moelijk was om kleine gevallen uit te werken. Dat is ook wel te zien aan de scores voor deze opgave. Slechts 4 deelnemers wisten de opgave volledig op te lossen, maar wel 52 deelnemers kregen een deelscore omdat ze toch een eindje op weg waren gekomen. De opgave laat goed zien hoeveel verschillende creatieve stappen er soms nodig zijn om een olympiade-vraagstuk op te lossen! ■