Selectietoets

vrijdag 6 maart 2015

Opgave 1. Laat m en n positieve gehele getallen zijn zodat $5m+n$ een deler is van $5n+m$. Bewijs dat m een deler is van n.

Opgave 2. Gegeven zijn positieve gehele getallen r en k en een oneindige rij positieve gehele getallen $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ zodat $\frac{r}{a_r} = k+1$. Bewijs dat er een t is met $\frac{t}{a_t} = k$.

Opgave 3. Zij $n \geq 2$ een positief geheel getal. Ieder vakje van een $n \times n$-bord wordt rood of blauw gekleurd. We leggen dominostenen op het bord, die elk twee vakjes bedekken. We noemen een dominosteen *effen* als hij op twee rode of twee blauwe vakjes ligt en *kleurrijk* als hij op een rood en een blauw vakje ligt. Vind het grootste positieve gehele getal k met de volgende eigenschap: hoe de rood/blauw-kleuring van het bord ook gebeurt, het is altijd mogelijk om k niet-overlappende dominostenen op het bord te leggen die ofwel allemaal effen zijn ofwel allemaal kleurrijk.

Opgave 4. In een driehoek ABC is D het snijpunt van de binnenbissectrice van $\angle BAC$ met zijde BC. Zij P het tweede snijpunt van de buitenbissectrice van $\angle BAC$ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Een cirkel door A en P snijdt lijnstuk BP inwendig in E en lijnstuk CP inwendig in F. Bewijs dat $\angle DEP = \angle DFP$.

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$(x^2 + y^2)f(xy) = f(x)f(y)f(x^2 + y^2)$$

voor alle reële x en y.