IMO-selectietoets II

zaterdag 7 juni 2014

Uitwerkingen

Opgave 1. Zij $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{R}$ een functie waarvoor geldt: voor alle $n > 1$ is er een priemdeler p van n zodat

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Bovendien is gegeven dat $f(2^{2014}) + f(3^{2015}) + f(5^{2016}) = 2013$.
Bereken $f(2014^2) + f(2015^3) + f(2016^5)$.

Oplossing. Als $n = q$ met q priem, dan is er maar één priemdeler van n, namelijk q, dus moet gelden dat $f(q) = f(1) - f(q)$, dus $f(q) = \frac{1}{2}f(1)$. Als $n = q^2$ met q priem, dan heeft n ook maar één priemdeler, dus geldt $f(q^2) = f(q) - f(q) = 0$. We bewijzen nu met inductie naar k dat $f(q^k) = \frac{2-k}{2}f(1)$ als q een priemgetal is en k een positief geheel getal. Voor $k = 1$ en $k = 2$ hebben we dit al laten zien. Stel nu dat $f(q^k) = \frac{2-k}{2}f(1)$ voor zekere $k \geq 2$ en vul in $n = q^{k+1}$. Er geldt

$$f(q^{k+1}) = f(q^k) - f(q) = \frac{2-k}{2}f(1) - \frac{1}{2}f(1) = \frac{2-(k+1)}{2}f(1).$$

Dit voltooit de inductie.
Nu gebruiken we ons tweede gegeven. Er geldt

$$\begin{aligned} 2013 &= f(2^{2014}) + f(3^{2015}) + f(5^{2016}) \\ &= \frac{2-2014}{2}f(1) + \frac{2-2015}{2}f(1) + \frac{2-2016}{2}f(1) \\ &= -\frac{6039}{2}f(1), \end{aligned}$$

dus $f(1) = \frac{2013\cdot 2}{-6039} = -\frac{2}{3}$. En dan geldt voor elk priemgetal q dat $f(q) = \frac{1}{2}f(1) = -\frac{1}{3}$.
We bewijzen vervolgens dat als $n = p_1p_2\cdots p_m$ met $p_1, p_2, \ldots, p_m$ niet noodzakelijk verschillende priemgetallen en $m \geq 0$, dat dan geldt $f(n) = \frac{m-2}{3}$. Dit doen we met inductie naar m. Voor $m = 0$ is $n = 1$ en $f(1) = -\frac{2}{3} = \frac{0-2}{3}$, dus hiervoor klopt het. Stel nu dat we het bewezen hebben voor zekere $m \geq 0$. Bekijk een willekeurige n van de vorm $n = p_1p_2\cdots p_{m+1}$. Dan is $n > 1$, dus is er een priemfactor $p \mid n$ waarvoor geldt $f(n) = f(\frac{n}{p}) - f(p)$; zonder verlies van algemeenheid is dit $p = p_{m+1}$. Nu volgt

$$f(n) = f\left(p_1p_2\cdots p_m\right) - f(p_{m+1}) = \frac{m-2}{3} - -\frac{1}{3} = \frac{(m+1)-2}{3}.$$

Dit voltooit de inductie.
We kunnen nu het gevraagde berekenen. De priemfactorisaties van 2014, 2015 en 2016 zijn $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ en $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, dus

$$f(2014^2) + f(2015^3) + f(2016^5) = \frac{6-2}{3} + \frac{9-2}{3} + \frac{40-2}{3} = \frac{49}{3}.$$

$\square$

Opgave 2. De verzamelingen A en B zijn deelverzamelingen van de positieve gehele getallen. De som van elke twee verschillende elementen uit A is een element van B. Het quotiënt van elke twee verschillende elementen van B (waarbij we de grootste door de kleinste delen) is een element van A. Bepaal het maximale aantal elementen in $A \cup B$.

Oplossing. Stel dat A minstens drie elementen bevat, zeg $a < b < c$. Dan bevat B de drie verschillende elementen $a + b < a + c < b + c$. Dus A bevat in elk geval het element $\frac{b+c}{a+c}$. Deze breuk is kennelijk geheel, dus $a+c \mid b+c$. Maar dan volgt $a+c \mid (b+c)-(a+c) = b-a$. We weten $b > a$, dus $b-a$ is positief, dus moet gelden $a+c \leq b-a$. Dit geeft $c \leq b-2a < b$, een tegenspraak met $c > b$. Dus A bevat hoogstens twee elementen.
Stel dat B minstens vier elementen bevat, zeg $a < b < c < d$. Dan bevat A de drie verschillende elementen $\frac{d}{a}$, $\frac{d}{b}$ en $\frac{d}{c}$. Maar A kan geen drie verschillende elementen bevatten, tegenspraak. Dus B bevat hoogstens drie elementen.
In totaal bevat $A \cup B$ dus hoogstens 5 elementen. Dit is mogelijk, bijvoorbeeld met $A = \{2, 4\}$ en $B = \{3, 6, 12\}$. Nu is $2 + 4 = 6 \in B$ en $\frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2 \in A$ en $\frac{12}{3} = 4 \in A$, dus dit paar verzamelingen voldoet. We concluderen dat $A \cup B$ maximaal 5 elementen bevat.
Het vinden van een paar verzamelingen dat voldoet, kan bijvoorbeeld als volgt. Stel B bevat de elementen $a < b < c$. Dan bevat A de elementen $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$ en $\frac{c}{a}$, waarvan $\frac{c}{a}$ in elk geval de grootste is. Omdat A maar twee elementen bevat, moet wel gelden $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$. Verder moet de som van de twee elementen in A weer in B zitten, dus $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \in B$. Schrijf $b = ta$, dan $c = tb = t^2a$ en $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = t + t^2$. Nu zie je dat b gelijk kan zijn aan $t + t^2$ door $a = t + 1$ te kiezen. Met $t = 1$ krijg je $b = a$, dus die voldoet niet; met $t = 2$ krijg je bovenstaande oplossing. $\square$

Opgave 3. Zij H het hoogtepunt van een scherphoekige driehoek ABC. De lijn door A loodrecht op AC en de lijn door B loodrecht op BC snijden elkaar in D. De cirkel met middelpunt C door H snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek ABC in de punten E en F. Bewijs dat $|DE| = |DF| = |AB|$.

Oplossing I. De driehoek is scherphoekig, dus H ligt binnen de driehoek. Dat betekent dat E en F op de korte bogen AC en BC liggen. Neem aan dat E op de korte boog AC ligt en F op de korte boog BC.
Als we H spiegelen in AC, komt het spiegelbeeld H' op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ terecht. (Dit is een bekend feit, te bewijzen door met wat hoekenjagen te laten zien dat $\angle AHC = 180° - \angle ABC$.) Anderzijds ligt dit spiegelbeeld ook op de cirkel met middelpunt C door H, aangezien $|CH'| = |CH|$. Dus H' is het snijpunt van de twee cirkels en dat is E. We concluderen dat E het spiegelbeeld van H is onder spiegeling in AC.
Dit betekent dat EH loodrecht op AC staat en dus dezelfde lijn is als BH. Omdat AD ook loodrecht op AC staat, zijn BE en AD evenwijdig. Verder ligt D op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ omdat $\angle CAD + \angle CBD = 90° + 90° = 180°$. We hadden al gezien dat E op de korte boog AC ligt, dus is $EADB$ een koordenvierhoek in die volgorde. Nu is $\angle BEA + \angle EAD = 180°$ wegens U-hoeken, maar ook $\angle EBD + \angle EAD = 180°$ vanwege de koordenvierhoek. Dus $\angle BEA = \angle EBD$, dus de bijbehorende koorden BA en ED zijn even lang.
Analoog kunnen we bewijzen dat $|AB| = |DF|$, waarmee het gevraagde bewezen is. □

Oplossing II. Op dezelfde manier als in de eerste oplossing laten we zien dat E het spiegelbeeld van H is onder spiegeling in AC en dat $EADB$ een koordenvierhoek is in die volgorde. Vanwege de spiegeling is $|AE| = |AH|$. Omdat zowel BD als AH loodrecht op BC staan, zijn ze evenwijdig. Analoog zijn ook AD en BH evenwijdig, dus is $ADBH$ een parallellogram. Dus is $|AH| = |BD|$, waarmee we zien dat $|AE| = |BD|$. We hebben nu een koorde EA naast een koorde AD, en verder een koorde BD (even lang als EA) naast weer dezelfde koorde AD. We laten nu zien dat de overspannende koorden ED en AB daarom gelijk zijn. Er geldt $\angle AED = \angle ABD$. En omdat $|AE| = |BD|$ geldt $\angle ADE = \angle BAD$. Dus $\triangle EAD \cong \triangle BDA$ (ZHH), waaruit volgt $|DE| = |AB|$.
Analoog kunnen we bewijzen dat $|AB| = |DF|$, waarmee het gevraagde bewezen is. □

Opgave 4. Bepaal alle paren (p, q) van priemgetallen waarvoor $p^{q+1} + q^{p+1}$ een kwadraat is.

Oplossing. Stel eerst dat p en q beide oneven zijn. Dan zijn in $p^{q+1}+q^{p+1}$ beide exponenten even, waaruit volgt dat beide termen congruent 1 mod 4 zijn. De som is dus congruent 2 mod 4, maar dat is nooit een kwadraat.
Stel nu dat p en q beide even zijn. Dan zijn ze beide gelijk aan 2. Dat geeft $p^{q+1} + q^{p+1} = 2^3 + 2^3 = 16 = 4^2$, dus dit tweetal voldoet.
Stel ten slotte dat één beide, zeg p, even is en de ander oneven. We hebben dan dus $p = 2$ en $2^{q+1} + q^3 = a^2$ voor een zeker positief geheel getal a. Schrijf $q + 1 = 2b$ met b positief geheel, dan staat er $2^{2b} + q^3 = a^2$, oftewel

$$q^3 = a^2 - 2^{2b} = (a - 2^b)(a + 2^b).$$

Beide factoren rechts moeten nu een q-macht zijn, zeg $a - 2^b = q^k$ en $a + 2^b = q^l$ met $l > k \geq 0$. Beide factoren zijn deelbaar door q^k, dus ook het verschil is daardoor deelbaar. Dus $q^k \mid 2 \cdot 2^b = 2^{b+1}$. Maar q is een oneven priemgetal, dus de enige q-macht die een deler van een tweemacht is, is 1. Dus $k = 0$. We krijgen nu $q^3 = a + 2^b$ en $a - 2^b = 1$, dus $q^3 = (2^b + 1) + 2^b = 2^{b+1} + 1$. Daaruit volgt

$$2^{b+1} = q^3 - 1 = (q - 1)(q^2 + q + 1).$$

Echter, $q^2 + q + 1 \equiv 1 \mod 2$ en verder is $q^2 + q + 1 > 1$, dus dit kan nooit een tweemacht zijn. Tegenspraak.
We concluderen dat de enige oplossing $(p, q) = (2, 2)$ is. $\square$

Opgave 5. Zij $P(x)$ een polynoom met gehele coëfficiënten en graad $n \leq 10$ waarvoor geldt dat er voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ een gehele m is met $P(m) = k$. Verder is gegeven dat $|P(10) - P(0)| < 1000$. Bewijs dat er voor elke gehele k een gehele m is met $P(m) = k$.

Oplossing. Laat voor $i = 1, 2, \ldots, 10$ het gehele getal c_i zo zijn dat $P(c_i) = i$. Er geldt voor $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ dat

$$c_{i+1} - c_i \mid P(c_{i+1}) - P(c_i) = (i+1) - i = 1,$$

dus $c_{i+1} - c_i = \pm 1$ voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Verder geldt dat $c_i \neq c_j$ voor $i \neq j$, want $P(c_i) = i \neq j = P(c_j)$. We concluderen dat $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ tien opeenvolgende getallen zijn, ofwel stijgend ofwel dalend. We onderscheiden dus twee gevallen:

(A) $c_i = c_1 - 1 + i$ voor $i = 1, 2, \ldots, 10$ (dus $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ is een stijgend rijtje opeenvolgende getallen),

(B) $c_i = c_1 + 1 - i$ voor $i = 1, 2, \ldots, 10$ (dus $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ is een dalend rijtje opeenvolgende getallen).

Bekijk eerst geval (A). Definieer $Q(x) = 1 + x - c_1$. Dan geldt voor $1 \leq i \leq 10$ dat

$$Q(c_i) = Q(c_1 - 1 + i) = 1 + (c_1 - 1 + i) - c_1 = i = P(c_i),$$

dus $P(c_i) - Q(c_i) = 0$. Dus kunnen we schrijven

$$P(x) - Q(x) = R(x) \cdot \prod_{i=1}^{10}(x - c_i),$$

oftewel

$$P(x) = 1 + x - c_1 + R(x) \cdot \prod_{i=1}^{10}(x - c_i).$$

Omdat de graad van P hoogstens 10 is, mag de graad van R niet groter dan 0 zijn. Dus $R(x)$ is een constante, zeg $R(x) = a$ met $a \in \mathbb{Z}$. We krijgen dan

$$P(x) = 1 + x - c_1 + a \cdot \prod_{i=1}^{10}(x - c_i).$$

We vullen nu $x = 10$ en $x = 0$ in:

$$\begin{aligned} P(10) - P(0) &= 1 + 10 - c_1 + a \cdot \prod_{i=1}^{10}(10 - c_i) - (1 + 0 - c_1) - a \cdot \prod_{i=1}^{10}(0 - c_i) \\ &= 10 + a \cdot \left(\prod_{i=1}^{10}(10 - c_i) - \prod_{i=1}^{10}(0 - c_i) \right). \end{aligned}$$

De getallen $10 - c_1$, $10 - c_2$, $\ldots$, $10 - c_{10}$ zijn tien opeenvolgende getallen en de getallen $0 - c_1$, $0 - c_2$, $\ldots$, $0 - c_{10}$ volgen daar weer precies op. Dus er is een N zodat

$$\prod_{i=1}^{10}(10 - c_i) - \prod_{i=1}^{10}(0 - c_i) = (N + 20)(N + 19)\cdots(N + 11) - (N + 10)(N + 9)\cdots(N + 1).$$

We gaan dit afschatten. We nemen eerst aan dat $N + 1 > 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
(N + 20)(N + 19)\cdots(N + 11) &- (N + 10)(N + 9)\cdots(N + 1) \\
&> (N + 20)(N + 9)\cdots(N + 1) - (N + 10)(N + 9)\cdots(N + 1) \\
&= 10 \cdot (N + 9)(N + 8)\cdots(N + 1) \\
&\geq 10!.
\end{aligned}$$

Als juist $N + 20 < 0$, zijn alle factoren negatief. Helemaal analoog is het absolute verschil ook weer groter dan $10!$. Als $N + 20 \geq 0$ en $N + 1 \leq 0$, zit er dus ergens een 0 tussen de factoren. Dus precies één van de twee termen is gelijk aan 0 en de ander is in absolute waarde minstens $10!$. We concluderen dat het absolute verschil altijd minstens $10!$ is. Dus als $a \neq 0$ is $|P(10) - P(0)| \geq 10! - 10 > 1000$. Gegeven is echter dat $|P(10) - P(0)| < 1000$, dus blijkbaar moet gelden dat $a = 0$. Nu vinden we dat

$$P(x) = 1 + x - c_1.$$

Zij $k \in \mathbb{Z}$ willekeurig en kies $m = k - 1 + c_1$. Dan geldt $P(m) = 1 + (k - 1 + c_1) - c_1 = k$. Dus voor elke gehele k is er een gehele m met $P(m) = k$.
Bekijk nu geval (B). We kunnen precies dezelfde redenering volgen, waarbij we nu $Q(x) = 1 - x + c_1$ definiëren en uiteindelijk krijgen dat

$$P(x) = 1 - x + c_1 + a \cdot \prod_{i=1}^{10}(x - c_i).$$

We leiden op dezelfde manier af dat $a = 0$, zodat

$$P(x) = 1 - x + c_1.$$

En nu volgt weer dat er voor elke gehele k een gehele m is met $P(m) = k$. $\square$