IMO-selectietoets I

vrijdag 6 juni 2014

Opgave 1. Bepaal alle paren (a, b) van positieve gehele getallen waarvoor

$$a^2 + b \mid a^2b + a \qquad \text{en} \qquad b^2 - a \mid ab^2 + b.$$

Opgave 2. Zij $\triangle ABC$ een driehoek. Zij M het midden van BC en zij D een punt op het inwendige van zijde AB. Het snijpunt van AM en CD noemen we E. Veronderstel dat $|AD| = |DE|$. Bewijs dat $|AB| = |CE|$.

Opgave 3. Laat a, b en c rationale getallen zijn waarvoor $a + bc$, $b + ac$ en $a + b$ allemaal ongelijk aan 0 zijn en waarvoor geldt dat

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} = \frac{1}{a + b}.$$

Bewijs dat $\sqrt{(c - 3)(c + 1)}$ rationaal is.

Opgave 4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AC| = 2|AB|$ en zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zij D het snijpunt van de bissectrice van $\angle A$ met BC. Zij E de loodrechte projectie van O op AD en zij $F \neq D$ het punt op AD waarvoor $|CD| = |CF|$. Bewijs dat $\angle EBF = \angle ECF$.

Opgave 5. Op een 2014×2014-bord staat op elk van de 2014^2 vakjes een lamp. Lampen kunnen aan of uit staan. In de beginsituatie is een aantal van de lampen aan. In een zet kies je een rij of kolom waarin minstens 1007 lampen aan staan en verander je van alle 2014 lampen in die rij of kolom de status (van aan naar uit en van uit naar aan). Vind de kleinste niet-negatieve gehele k zodat geldt: vanuit elke beginsituatie kun je in een eindig aantal stappen naar een situatie waarin hoogstens k lampen aan staan.