Selectietoets

vrijdag 21 maart 2014

Opgave 1. Vind alle niet-negatieve gehele getallen n waarvoor er gehele getallen a en b bestaan met $n^2 = a + b$ en $n^3 = a^2 + b^2$.

Opgave 2. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt:

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x)$$

voor alle reële x, y ongelijk aan 0.

Opgave 3. In driehoek ABC is I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Een cirkel raakt aan AI in I en gaat verder door B. Deze cirkel snijdt AB nogmaals in P en BC nogmaals in Q. De lijn QI snijdt AC in R. Bewijs dat $|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2$.

Opgave 4. Laat $m \geq 3$ en n positieve gehele getallen zijn met $n > m(m-2)$. Vind het grootste positieve gehele getal d zodat $d \mid n!$ en $k \nmid d$ voor alle $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$.

Opgave 5. Zij n een positief geheel getal. Daniël en Merlijn spelen een spel. Daniël heeft k vellen papier die naast elkaar op tafel liggen, waarbij k een positief geheel getal is. Hij schrijft op elk vel papier een aantal van de getallen 1 tot en met n (geen enkel getal mag ook, alle getallen mag ook). Op de achterkant van elk vel papier schrijft hij juiste de overige getallen van 1 tot en met n. Als Daniël klaar is, mag Merlijn een aantal vellen papier met de achterkant boven leggen (hij mag dit ook bij geen enkel vel of juist alle vellen doen). Als het hem lukt om de getallen 1 tot en met n allemaal tegelijk zichtbaar te maken (waarbij dubbele mogen voorkomen), dan wint hij.
Bepaal de kleinste k waarvoor Merlijn altijd kan winnen, wat Daniël ook doet.