IMO-selectietoets II

zaterdag 8 juni 2013

Uitwerkingen

Opgave 1. Bewijs dat
$$\sum_{n=0}^{2013} \frac{4026!}{\big(n!(2013-n)!\big)^2}$$
het kwadraat van een geheel getal is.

Oplossing. *Door 2013 te vervangen door 1, 2, 3 en 4 en de som dan uit te rekenen, krijg je een vermoeden voor welk getal in het kwadraat deze som oplevert. De faculteiten suggereren dat je het in de binomiaalcoëfficiënten moet zoeken.* We bewijzen iets algemeners:
$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2m)!}{\big(n!(m-n)!\big)^2} = \binom{2m}{m}^2. \tag{1}$$

Hieruit volgt het gevraagde.
Er geldt
$$\frac{(2m)!}{\big(n!(m-n)!\big)^2} = \frac{(m!)^2}{\big(n!(m-n)!\big)^2} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \binom{m}{n}^2 \cdot \binom{2m}{m}.$$
Het is dus voldoende te bewijzen dat
$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2 = \binom{2m}{m}.$$

We doen dit combinatorisch. Bekijk $2m$ ballen genummerd van 1 tot en met $2m$, waarbij de ballen van 1 tot en met m blauw gekleurd zijn en de ballen van $m+1$ tot en met $2m$ rood gekleurd zijn. Je wilt hier totaal m ballen van uitkiezen. Dat kan op $\binom{2m}{m}$ manieren. Anderzijds kunnen we ook eerst n blauwe ballen uitkiezen, met $0 \leq n \leq m$, en vervolgens $m-n$ rode ballen. Dat komt op hetzelfde neer als eerst n blauwe ballen uitkiezen en daarna n rode ballen *niet* uitkiezen. Dus het aantal manieren om m ballen uit te kiezen is ook gelijk aan
$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}^2.$$

Dus deze som is gelijk aan $\binom{2m}{m}$. En daarmee hebben we (1) bewezen. □

Opgave 2. Zij P het snijpunt van de diagonalen van een convexe vierhoek $ABCD$. Laat X, Y en Z punten op het inwendige van respectievelijk AB, BC en CD zijn zodat

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BY|}{|YC|} = \frac{|CZ|}{|ZD|} = 2.$$

Veronderstel bovendien dat XY raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle CYZ$ en dat YZ raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle BXY$.
Bewijs dat $\angle APD = \angle XYZ$.

Oplossing. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling is $\angle CZY = \angle BYX$ en $\angle BXY = \angle CYZ$. Hieruit volgt ten eerste dat

$$\angle XYZ = 180° - \angle BYX - \angle CYZ = 180° - \angle BYX - \angle BXY = \angle XBY = \angle ABC.$$

Ten tweede zien we dat $\triangle XBY \sim \triangle YCZ$ (hh). Dit betekent

$$\frac{|XB|}{|BY|} = \frac{|YC|}{|CZ|}.$$

Gegeven is dat $|XB| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BY| = \frac{2}{3}|BC|$, $|YC| = \frac{1}{3}|BC|$ en $|CZ| = \frac{2}{3}|CD|$. Dit invullen geeft

$$\frac{\frac{1}{3}|AB|}{\frac{2}{3}|BC|} = \frac{\frac{1}{3}|BC|}{\frac{2}{3}|CD|}$$

en dus

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}.$$

Uit de gelijkvormigheid volgt ook $\angle ABC = \angle XBY = \angle YCZ = \angle BCD$. Als we dit combineren met de gevonden verhouding, krijgen we een nieuwe gelijkvormigheid: $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ (zhz). Dus $\angle CAB = \angle DBC$. Dit geeft

$$\angle PAB + \angle ABP = \angle CAB + \angle ABD = \angle DBC + \angle ABD = \angle ABC.$$

We wisten al dat $\angle ABC = \angle XYZ$. Met de buitenhoekstelling in driehoek ABP krijgen we nu

$$\angle BPC = \angle PAB + \angle ABP = \angle ABC = \angle XYZ.$$

Aangezien $\angle BPC = \angle APD$, geldt $\angle APD = \angle XYZ$. $\square$

Opgave 3. Gegeven is een onbekende rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ van gehele getallen die voldoet aan de volgende eigenschap: voor elk priemgetal p en elk positief geheel getal k geldt

$$a_{pk+1} = pa_k - 3a_p + 13.$$

Bepaal alle mogelijke waarden van a_{2013}.

Oplossing I. Laat q en t priemgetallen zijn. Vul in $k = q$, $p = t$:

$$a_{qt+1} = ta_q - 3a_t + 13.$$

Vul ook in $k = t$, $p = q$:

$$a_{qt+1} = qa_t - 3a_q + 13.$$

Beide uitdrukkingen rechts zijn dus gelijk aan elkaar, waaruit volgt

$$ta_q - 3a_t = qa_t - 3a_q,$$

oftewel

$$(t+3)a_q = (q+3)a_t.$$

In het bijzonder geldt $5a_3 = 6a_2$ en $5a_7 = 10a_2$. Vul nu $k = 3$, $p = 2$ in:

$$a_7 = 2a_3 - 3a_2 + 13 = 2 \cdot \frac{6}{5}a_2 - 3a_2 + 13.$$

Omdat $a_7 = \frac{10}{5}a_2$, vinden we nu

$$\frac{13}{5}a_2 = 13,$$

dus $a_2 = 5$. Nu geldt voor elk priemgetal p dat $a_p = \frac{(p+3)a_2}{5} = p + 3$.
Vul in $k = 4$, $p = 3$:

$$a_{13} = 3a_4 - 3a_3 + 13.$$

We weten dat $a_{13} = 16$ en $a_3 = 6$, dus dit geeft $3a_4 = 21$, oftewel $a_4 = 7$.
Vul ten slotte $k = 4$ en $p = 503$ in:

$$a_{2013} = a_{4\cdot 503+1} = 503 \cdot a_4 - 3a_{503} + 13 = 503 \cdot 7 - 3 \cdot (503 + 3) + 13 = 503 \cdot 4 - 9 + 13 = 2016.$$

Dus $a_{2013} = 2016$ en dit is de enige mogelijke waarde. $\square$

Oplossing II. Leid net als in oplossing I af dat $a_2 = 5$ en $a_p = p+3$ voor alle priemgetallen p. Dan geldt dus $a_3 = 6$. Invullen van $k = 1$ en $p = 2$ geeft

$$a_3 = 2a_1 - 3a_2 + 13 = 2a_1 - 2,$$

dus $2a_1 = a_3 + 2 = 8$, dus $a_1 = 4$. Nu hebben we a_1 en a_2 berekend. Voor $n \geq 3$ geldt dat er altijd een priemgetal p is met $p \mid n - 1$, dus dat we altijd p en k kunnen vinden zodat

$n = kp + 1$. Dus ligt de waarde van a_n vast als we alle waarden a_m met $1 \leq m < n$ al kennen. Er kan dus maar één rij zijn die voldoet. We proberen nu of $a_n = n + 3$ voldoet. Dan geldt

$$pa_k - 3a_p + 13 = p(k+3) - 3(p+3) + 13 = pk + 3p - 3p - 9 + 13 = pk + 4 = a_{pk+1}.$$

Dus dit voldoet inderdaad. De enige rij die voldoet is dus degene met $a_n = n + 3$ voor alle $n \geq 1$, waaruit volgt dat de enige mogelijke waarde voor a_{2013} gelijk is aan 2016. $\square$

Opgave 4. Bepaal alle gehele getallen $n \geq 2$ waarvoor geldt dat

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \mod 2$$

voor alle i en j met $0 \leq i \leq j \leq n$.

Oplossing. We laten eerst zien dat n voldoet dan en slechts dan als $\binom{n}{i} \equiv i + 1 \mod 2$ voor alle i met $0 \leq i \leq n$. Stel dat $\binom{n}{i} \equiv i + 1 \mod 2$ voor alle i, dan geldt $\binom{n}{i} + \binom{n}{j} \equiv i + 1 + j + 1 \equiv i + j \mod 2$ voor alle i en j. Dus n voldoet dan aan de voorwaarde in de opgave. Stel andersom dat n voldoet. Omdat $\binom{n}{0} = 1$, geldt dan $i \equiv 1 + \binom{n}{i} \mod 2$ voor alle i, dus $\binom{n}{i} \equiv i - 1 \equiv i + 1 \mod 2$ voor alle i.
Schrijf nu n als $n = 2^k + m$ met $0 \leq m < 2^k$. Omdat $n \geq 2$, mogen we aannemen $k \geq 1$. Bekijk

$$\binom{n}{2^k - 2} = \binom{2^k + m}{2^k - 2} = \frac{(2^k + m)(2^k + m - 1) \cdots (m + 4)(m + 3)}{(2^k - 2)(2^k - 3) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Het product in de noemer bevat $\lfloor \frac{2^k - 2}{2} \rfloor$ factoren deelbaar door 2, $\lfloor \frac{2^k - 2}{4} \rfloor$ factoren deelbaar door 4, ..., $\lfloor \frac{2^k - 2}{2^{k-1}} \rfloor$ factoren deelbaar door 2^{k-1} en geen factoren deelbaar door 2^k. Het product in de teller bestaat uit $2^k - 2$ opeenvolgende factoren en bevat daarom minstens $\lfloor \frac{2^k - 2}{2} \rfloor$ factoren deelbaar door 2, minstens $\lfloor \frac{2^k - 2}{4} \rfloor$ factoren deelbaar door 4, ..., minstens $\lfloor \frac{2^k - 2}{2^{k-1}} \rfloor$ factoren deelbaar door 2^{k-1}. Het product in de teller bevat dus minstens evenveel factoren 2 als het product in de noemer. Het product in de teller bevat zeker meer factoren 2 dan het product in de noemer als 2^k voorkomt als factor in de teller. Dat is zo als $m + 3 \leq 2^k$, oftewel als $m \leq 2^k - 3$. Dus als $m \leq 2^k - 3$, dan is $\binom{n}{2^k - 2}$ even, terwijl $2^k - 2$ ook even is. Dan voldoet $n = 2^k + m$ dus niet.
Dus n kan alleen voldoen als er een $k \geq 2$ is met $2^k - 2 \leq n \leq 2^k - 1$. Als n oneven is, geldt $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n \equiv 0 \mod 2$, dus dan voldoet n niet. Dus n kan alleen voldoen als hij van de vorm $n = 2^k - 2$ met $k \geq 2$ is. Stel nu dat n inderdaad van die vorm is. We gaan laten zien dat n voldoet. Er geldt

$$\binom{2^k - 2}{c} = \frac{(2^k - 2)(2^k - 3) \cdots (2^k - c)(2^k - c - 1)}{c \cdot (c - 1) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Het aantal factoren 2 in $2^k - i$ is gelijk aan het aantal factoren 2 in i voor $1 \leq i \leq 2^k - 1$. Dus het aantal factoren 2 in de teller is gelijk aan het aantal factoren 2 in het product $(c+1) \cdot c \cdot (c-1) \cdots 2$, oftewel het aantal factoren 2 in de noemer plus het aantal factoren 2 in $c+1$. Dus $\binom{2^k - 2}{c}$ is even dan en slechts dan als c oneven is. Dit betekent dat $n = 2^k - 2$ voldoet.
We concluderen dat n voldoet dan en slechts dan als $n = 2^k - 2$ met $k \geq 2$. $\square$

Opgave 5. In een koordenzeshoek $ABCDEF$ geldt $AB \perp BD$ en $|BC| = |EF|$. Noem P het snijpunt van BC en AD en noem Q het snijpunt van EF en AD. Neem aan dat P en Q allebei aan de kant van D liggen waar A niet ligt. Zij S het midden van AD. Laat K en L de middelpunten zijn van de ingeschreven cirkels van respectievelijk $\triangle BPS$ en EQS. Bewijs dat $\angle KDL = 90°$.

Oplossing. *Het is bij deze opgave nuttig om te analyseren wat er gebeurt als je met punten schuift. Je kunt namelijk lijnstuk EF verschuiven zonder dat dat invloed op K heeft. Dus L kan onafhankelijk van K bewegen. Kennelijk beweegt L dan wel altijd over een lijn door D die loodrecht op KD staat. De hoek $\angle LDS$ is blijkbaar onafhankelijk van de positie van lijnstuk EF. Omdat we met een cirkel te maken hebben, suggereert dit dat $\angle LDS$ misschien gelijk is aan een bepaalde omtrekshoek. Dan zou $\angle KDS$ ook gelijk aan een omtrekshoek worden, en wel zo dat die twee omtrekshoeken samen $90°$ zijn. Op deze manier kun je ideeën krijgen om uiteindelijk tot het volgende bewijs te komen.*

De configuratie ligt vast door de gegeven volgorde van de punten A tot en met F op de cirkel en door het gegeven over de punten P en Q op de lijn AD. We hoeven dus geen verschillende configuraties te onderscheiden. (De punten P en Q kunnen wel verwisseld worden op de lijn AD, maar dat is niet relevant.)

Merk eerst op dat S het middelpunt van de cirkel is, aangezien vanwege $\angle ABD = 90°$ de lijn AD middellijn is, en S het midden van AD is. We gaan nu bewijzen dat $\angle KDS = \angle KBS$. We weten dat KS een bissectrice is, dus $\angle BSK = \angle KSD$. Verder is $|SD| = |SB|$, omdat beide lengtes gelijk zijn aan de straal van de cirkel. Omdat ook $|SK| = |SK|$, vinden we $\triangle DSK \cong \triangle BSK$ (ZHZ). Dus $\angle KDS = \angle KBS$.

Omdat ook BK een bissectrice is, geldt $\angle KBS = \angle CBK = \frac{1}{2}\angle CBS$. Dus $\angle KDS = \frac{1}{2}\angle CBS$.

Helemaal analoog leiden we af dat $\angle LDS = \frac{1}{2}\angle QES$, waaruit volgt dat $\angle LDS = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle FES) = 90° - \frac{1}{2}\angle FES$. Dus $\angle LDS + \angle KDS = 90° - \frac{1}{2}\angle FES + \frac{1}{2}\angle CBS$. Merk nu verder op dat $\triangle SBC \cong \triangle SEF$ (ZZZ), zodat $\angle FES = \angle CBS$. Nu kunnen we concluderen dat $\angle KDL = \angle LDS + \angle KDS = 90°$. $\square$