IMO-selectietoets I

woensdag 5 juni 2013

Uitwerkingen

Opgave 1. Vind alle viertallen (a, b, c, d) van reële getallen waarvoor geldt

$$\begin{aligned} ab + c + d &= 3, \\ bc + d + a &= 5, \\ cd + a + b &= 2, \\ da + b + c &= 6. \end{aligned}$$

Oplossing. De eerste twee vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft

$$2 = 5 - 3 = (bc + d + a) - (ab + c + d) = b(c - a) + a - c = (b - 1)(c - a).$$

De laatste twee vergelijkingen van elkaar aftrekken geeft

$$4 = 6 - 2 = (da + b + c) - (cd + a + b) = d(a - c) + c - a = (1 - d)(c - a).$$

We zien dat $c - a$ niet gelijk aan 0 is (want dan zou het product van $c - a$ met iets anders 0 moeten zijn) en we kunnen dus concluderen dat $1 - d = 2(b - 1)$, oftewel $3 = 2b + d$.
Op dezelfde manier combineren we de tweede en derde vergelijking; dat levert $3 = (c - 1)(b - d)$ op. En combineren van de eerste en vierde vergelijking geeft $3 = (1 - a)(b - d)$. Dus $c - 1 = 1 - a$, oftewel $a + c = 2$.
Nu tellen we de eerste twee vergelijkingen bij elkaar op. Dat geeft

$$8 = 3+5 = ab+c+d+bc+d+a = b(a+c)+(a+c)+2d = 2b+2+2d = 2+3+d = 5+d,$$

dus $d = 3$. Vanwege $2b + d = 3$ volgt hieruit dat $b = 0$. De eerste vergelijking wordt nu $0 + c + 3 = 3$, dus $c = 0$. In de tweede vergelijking vinden we ten slotte $0 + 3 + a = 5$, dus $a = 2$. We hebben nu gevonden dat de enige mogelijke oplossing is: $(a, b, c, d) = (2, 0, 0, 3)$. Controleren laat zien dat dit viertal inderdaad aan alle vier de vergelijkingen voldoet. $\square$

Opgave 2. Vind alle gehele getallen n waarvoor $\dfrac{4n-2}{n+5}$ het kwadraat van een rationaal getal is. *(Een rationaal getal is een getal in $\mathbb{Q}$.)*

Oplossing. Stel dat $\frac{4n-2}{n+5}$ het kwadraat van een rationaal getal is. Dan kunnen we het dus schrijven als $\frac{p^2}{q^2}$ met p, q niet-negatieve gehele getallen, $q \neq 0$ en $\text{ggd}(p, q) = 1$. Vanwege de voorwaarde $\text{ggd}(p, q) = 1$, is $\frac{p^2}{q^2}$ de meest vereenvoudigde versie van deze breuk, dus er is een gehele $c \neq 0$ zodat $4n - 2 = cp^2$ en $n + 5 = cq^2$. Nu is

$$22 = 4(n+5) - (4n-2) = 4cq^2 - cp^2 = c\big((2q)^2 - p^2\big) = c(2q-p)(2q+p).$$

Dus c is een deler van 22. Verder is 22 deelbaar door 2, dus de rechterkant is ook deelbaar door 2. Als er een factor 2 in $2q - p$ zit, zit er ook een factor 2 in $2q + p$, want die twee factoren schelen $2p$ en dat is even. En andersom, als $2q+p$ deelbaar is door 2, dan is $2q-p$ dat ook. Maar 22 bevat maar één factor 2, dus het kan niet dat $2q - p$ en $2q + p$ beide deelbaar zijn door 2. We concluderen dat $2q - p$ en $2q + p$ juist oneven zijn en c dus even is. Ten slotte geldt dat $p \geq 0$ en $q \geq 1$, dus $2q + p \geq 2$, dus de factor 11 uit 22 moet juist in $2q + p$ zitten. We concluderen dat er slechts twee mogelijkheden zijn:

- $c = 2$, $2q + p = 11$, $2q - p = 1$;
- $c = -2$, $2q + p = 11$, $2q - p = -1$.

In het eerste geval vinden we $2p = 11 - 1 = 10$, dus $p = 5$ en $q = 3$. Dit geeft $4n - 2 = 50$, dus $n = 13$. Controleren: $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{50}{18} = \frac{25}{9} = \frac{5^2}{3^2}$, dus $n = 13$ voldoet inderdaad. In het tweede geval vinden we $2p = 11 - -1 = 12$, dus $p = 6$, maar dan kan q niet meer geheel zijn, dus dit geval valt af. We concluderen dat er precies één oplossing is en dat is $n = 13$. $\square$

Opgave 3. Gegeven is een driehoek ABC. Zij Γ_1 de cirkel door B die raakt aan zijde AC in A. Zij Γ_2 de cirkel door C die raakt aan zijde AB in A. Het tweede snijpunt van Γ_1 en Γ_2 noemen we D. De lijn AD snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nog een keer in E. Bewijs dat D het midden is van AE.

Oplossing I. We bekijken de configuratie waar D binnen $\triangle ABC$ ligt. De andere configuratie gaat analoog. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_1 geldt $\angle DAC = \angle DBA$. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_2 geldt $\angle DAB = \angle DCA$. Er geldt dus $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ (hh), waaruit volgt

$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|CD|}, \quad \text{oftewel} \quad |AD|^2 = |BD| \cdot |CD|. \tag{1}$$

Volgens de omtrekshoekstelling geldt $\angle ECB = \angle EAB = \angle DAB = \angle DCA$. Dus $\angle ECD = \angle ECB + \angle BCD = \angle DCA + \angle BCD = \angle BCA$. Verder is $\angle DEC = \angle AEC = \angle ABC$ vanwege de omtrekshoekstelling. Dus $\triangle CDE \sim \triangle CAB$ (hh). Analoog zien we dat $\triangle BDE \sim \triangle BAC$. We concluderen dat $\triangle CDE \sim \triangle EDB$, waaruit volgt

$$\frac{|CD|}{|DE|} = \frac{|ED|}{|DB|}, \quad \text{oftewel} \quad |DE|^2 = |BD| \cdot |CD|.$$

Samen met (1) geeft dit $|DE|^2 = |AD|^2$, dus $|DE| = |AD|$, wat betekent dat D het midden van AE is. □

Oplossing II. We bekijken de configuratie waar D binnen $\triangle ABC$ ligt. De andere configuratie gaat analoog. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_2 geldt $\angle DAB = \angle DCA$. De buitenhoekstelling geeft nu dat

$$\angle CDE = \angle DCA + \angle CAD = \angle DAB + \angle CAD = \angle CAB. \tag{2}$$

Noem B' het tweede snijpunt van BD met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_1 geldt $\angle CAD = \angle ABD = \angle ABB' = \angle ACB'$, waarbij de laatste $=$ een toepassing van de omtrekshoekstelling is. Dus

$$\angle DCB' = \angle DCA + \angle ACB' = \angle DAB + \angle CAD = \angle CAB. \tag{3}$$

Verder is $\angle CB'D = \angle CB'B = \angle CAB$ vanwege de omtrekshoekstelling. We zien dat $\triangle DB'C$ gelijkbenig is met tophoek D. Ook geeft (2) samen met (3) dat $\angle CDE = \angle DCB'$, waaruit volgt $CB' \parallel DE$, oftewel $CB' \parallel AE$. Volgens de stelling van Julian geeft dit $|AB'| = |CE|$. We hebben nu een gelijkbenig trapezium $AECB'$. De middelloodlijnen van de evenwijdige zijden AE en CB' hiervan vallen samen. De middelloodlijn van CB' gaat door D omdat $\triangle DB'C$ gelijkbenig is. Dus de middelloodlijn van AE gaat ook door D, wat betekent dat D het midden van AE is. □

Oplossing III. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_1 geldt $\angle DAC = \angle DBA$. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling in Γ_2 geldt $\angle DAB = \angle DCA$. Er geldt dus $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ (hh). Noem nu M het midden van AB en N het midden van AC. Dan is DM een zwaartelijn in $\triangle DBA$ en is DN de corresponderende zwaartelijn in $\triangle DAC$. Daardoor weten we dat $\angle BDM = \angle ADN$. Dus

$$\begin{aligned}
\angle MDN &= \angle MDA + \angle ADN && \text{(opsplitsen hoek)}\\
&= \angle MDA + \angle BDM && \text{(gelijkheid van hiervoor)}\\
&= \angle BDA && \text{(optellen hoeken)}\\
&= 180^\circ - \angle ABD - \angle BAD && \text{(hoekensom } \triangle ABD\text{)}\\
&= 180^\circ - \angle CAD - \angle BAD && \text{(gelijkvormigheid } \triangle ABD \sim \triangle CAD\text{)}\\
&= 180^\circ - \angle CAB && \text{(optellen hoeken)}\\
&= 180^\circ - \angle NAM && \text{(zelfde hoek.)}
\end{aligned}$$

We concluderen dat $MDNA$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle MDA = \angle MNA$. Omdat MN een middenparallel in $\triangle ABC$ is, is $\angle MNA = \angle BCA$ en dat is wegens de omtrekshoekstelling weer gelijk aan $\angle BEA$. Al met al hebben we $\angle MDA = \angle BEA$, wat betekent dat MD evenwijdig is met BE. Aangezien M het midden van AB is, moet nu D ook het midden van AE zijn. $\square$

Opgave 4. Zij $n \geq 3$ een geheel getal en bekijk een $n \times n$-bord, opgedeeld in n^2 eenheidsvierkantjes. We hebben voor elke $m \geq 1$ willekeurig veel $1 \times m$-rechthoeken (type I) en willekeurig veel $m \times 1$-rechthoeken (type II) beschikbaar. We bedekken het bord met N van deze rechthoeken, die elkaar niet overlappen en niet uitsteken buiten het bord. Het totaal aantal rechthoeken van type I op het bord moet hierbij gelijk zijn aan het totaal aantal rechthoeken van type II op het bord. (Merk op dat een 1×1-rechthoek zowel van type I als van type II is.) Wat is de kleinste waarde van N waarvoor dit mogelijk is?

Oplossing. We bewijzen dat de minimale waarde $N = 2n - 1$ is. We construeren eerst een voorbeeld door middel van inductie.
Inductiebasis. Voor $n = 3$ is $N = 5$ mogelijk, door in het middelste veld een 1×1-rechthoek te leggen en de overige velden te bedekken met vier 2×1- en 1×2-rechthoeken. Er zijn dan drie rechthoeken met hoogte 1 (type I) en drie rechthoeken met breedte 1 (type II), waarbij de 1×1-rechthoek twee keer geteld wordt.
Inductiestap. Zij $k \geq 3$ en neem aan dat we een $k \times k$-bord kunnen bedekken met $2k - 1$ rechthoeken zodat aan alle voorwaarden is voldaan. Bekijk een $(k+1) \times (k+1)$-bord en bedek het $k \times k$-deelvierkant rechtsonder volgens de inductiehypothese. Bedek vervolgens de linkerkolom met een rechthoek met breedte 1 en hoogte $k+1$ en vervolgens de overgebleven ruimte met een rechthoek met hoogte 1 en breedte k. We hebben nu één rechthoek met breedte 1 en één rechthoek met hoogte 1 meer gebruikt, dus aan de voorwaarde is voldaan en we hebben $2k - 1 + 2 = 2(k + 1) - 1$ rechthoeken gebruikt. Hiermee hebben we een voorbeeld voor $n = k + 1$ geconstrueerd.
Hiermee is bewezen dat het mogelijk is om het bord te bedekken met $N = 2n - 1$ rechthoeken. We willen nu nog bewijzen dat het niet met minder rechthoeken kan. Zij k het aantal rechthoeken met breedte 1 en hoogte groter dan 1. Dan is ook het aantal rechthoeken met hoogte 1 en breedte groter dan 1, gelijk aan k. Zij verder l het aantal rechthoeken van 1×1. Er geldt dus $N = 2k + l$. Als $k \geq n$, geldt $N \geq 2n$, dus in dit geval is er niets te bewijzen. We nemen dus aan dat $k < n$ en we gaan bewijzen dat dan $l \geq 2n - 2k - 1$, zodat $N \geq 2n - 1$.
Elke rechthoek met breedte 1 kan alleen velden in één kolom bedekken. Er zijn dus $n - k$ kolommen waarin geen enkel veld wordt bedekt door een rechthoek met breedte 1 en hoogte groter dan 1. Zo ook zijn er $n - k$ rijen waarin geen enkel veld wordt bedekt door een rechthoek met hoogte 1 en breedte groter dan 1. Bekijk de $(n - k)^2$ velden die in zowel zo'n rij als zo'n kolom liggen. Deze velden moeten bedekt worden door 1×1-rechthoeken. Dus $l \geq (n - k)^2$.
Er geldt $(k-n+1)^2 \geq 0$, dus $k^2+n^2+1-2kn+2k-2n \geq 0$, dus $n^2-2kn+k^2 \geq 2n-2k-1$. We concluderen dat $l \geq (n - k)^2 \geq 2n - 2k - 1$ en dat is precies wat we wilden bewijzen. Dus in alle gevallen is $N \geq 2n - 1$ en dat bewijst dat de minimale waarde van N gelijk is aan $2n - 1$. □

Opgave 5. Laat a, b en c positieve reële getallen zijn met $abc = 1$. Bewijs dat

$$a + b + c \geq \sqrt{\frac{(a+2)(b+2)(c+2)}{3}}.$$

Oplossing I. Laat x, y en z positieve reële getallen zijn zodat $x^3 = a$, $y^3 = b$ en $z^3 = c$. Dan geldt $x^3y^3z^3 = 1$, dus ook $xyz = 1$. We kunnen nu $a+2$ schrijven als $x^3+2xyz = x(x^2+2yz)$, en analoog kunnen we $b + 2$ en $c + 2$ herschrijven, waarmee we krijgen

$$(a+2)(b+2)(c+2) = xyz(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy) = (x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy).$$

Nu passen we rekenkundig-meetkundig toe op de positieve termen $x^2 + 2yz$, $y^2 + 2zx$ en $z^2 + 2xy$:

$$(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy) \leq \left(\frac{x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy}{3}\right)^3 = \left(\frac{(x+y+z)^2}{3}\right)^3.$$

We hebben tot nu toe dus gevonden:

$$(a+2)(b+2)(c+2) \leq \frac{1}{27}\big((x+y+z)^3\big)^2. \tag{4}$$

We gaan nu bewijzen dat $(x + y + z)^3 \leq 9(x^3 + y^3 + z^3)$. *Voor wie het machtsgemiddelde kent: dit volgt direct uit de ongelijkheid van het rekenkundig gemiddelde en het derdemachtsgemiddelde.* Er geldt

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) + 6xyz.$$

Met rekenkundig-meetkundig op alleen maar positieve termen weten we dat

$$2x^3 + y^3 = x^3 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^6y^3} = 3x^2y,$$

en analoog $x^3 + 2y^3 \geq 3xy^2$. Als we deze beide ongelijkheden cyclisch doordraaien, vinden we

$$3(x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) \leq 6(x^3 + y^3 + z^3).$$

We weten natuurlijk ook $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3xyz$, dus al met al krijgen we

$$(x + y + z)^3 \leq (x^3 + y^3 + z^3) + 6(x^3 + y^3 + z^3) + 2(x^3 + y^3 + z^3) = 9(x^3 + y^3 + z^3).$$

Gecombineerd met (4) krijgen we nu

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) \leq \frac{1}{27}\big(9(x^3 + y^3 + z^3)\big)^2 = 3(a + b + c)^2.$$

Links en rechts delen door 3 en daarna de worteltrekken (beide kanten zijn positief) geeft nu precies het gevraagde. $\square$

Oplossing II. Merk op dat a, b en c positief zijn, zodat we hieronder steeds rekenkundig-meetkundig mogen toepassen. Allereerst passen we rekenkundig-meetkundig toe op a^2 en 1:

$$a^2 + 1 \geq 2\sqrt{a^2} = 2a.$$

Dit kunnen we cyclisch doordraaien en optellen, zodat we vinden:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c. \tag{5}$$

Verder passen we rekenkundig-meetkundig toe op bc, ca en ab:

$$bc + ca + ab \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3, \tag{6}$$

waarbij we gebruikt hebben dat $abc = 1$. Ook passen we rekenkundig-meetkundig toe op a^2, b^2 en c^2:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3. \tag{7}$$

Nu nemen we 2 keer (5), 4 keer (6) en 1 keer (7) en tellen dat op. Dan krijgen we:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 6 + 4bc + 4ca + 4ab + a^2 + b^2 + c^2 \geq 4a + 4b + 4c + 12 + 3.$$

Gelijke termen bij elkaar nemen, links en rechts 6 aftrekken en links en rechts $2ab+2bc+2ca$ optellen geeft:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 6ab + 6bc + 6ca \geq 2ab + 2bc + 2ca + 4a + 4b + 4c + 9.$$

Nu staat links $3(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) = 3(a+b+c)^2$. Rechts kunnen we 9 schrijven als $8 + abc$ en dan staat daar precies $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$. Als we dan ten slotte links en rechts delen door 3 en de wortel trekken (alles is nog steeds positief) dan krijgen we

$$a + b + c \geq \sqrt{\frac{(a + 2)(b + 2)(c + 2)}{3}}.$$

$\square$