IMO-selectietoets I

woensdag 5 juni 2013

Opgave 1. Vind alle viertallen (a, b, c, d) van reële getallen waarvoor geldt

$$\begin{aligned} ab + c + d &= 3, \\ bc + d + a &= 5, \\ cd + a + b &= 2, \\ da + b + c &= 6. \end{aligned}$$

Opgave 2. Vind alle gehele getallen n waarvoor $\dfrac{4n-2}{n+5}$ het kwadraat van een rationaal getal is. *(Een rationaal getal is een getal in* $\mathbb{Q}$*.)*

Opgave 3. Gegeven is een driehoek ABC. Zij Γ_1 de cirkel door B die raakt aan zijde AC in A. Zij Γ_2 de cirkel door C die raakt aan zijde AB in A. Het tweede snijpunt van Γ_1 en Γ_2 noemen we D. De lijn AD snijdt de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ nog een keer in E. Bewijs dat D het midden is van AE.

Opgave 4. Zij $n \geq 3$ een geheel getal en bekijk een $n \times n$-bord, opgedeeld in n^2 eenheidsvierkantjes. We hebben voor elke $m \geq 1$ willekeurig veel $1 \times m$-rechthoeken (type I) en willekeurig veel $m \times 1$-rechthoeken (type II) beschikbaar. We bedekken het bord met N van deze rechthoeken, die elkaar niet overlappen en niet uitsteken buiten het bord. Het totaal aantal rechthoeken van type I op het bord moet hierbij gelijk zijn aan het totaal aantal rechthoeken van type II op het bord. (Merk op dat een 1×1-rechthoek zowel van type I als van type II is.) Wat is de kleinste waarde van N waarvoor dit mogelijk is?

Opgave 5. Laat a, b en c positieve reële getallen zijn met $abc = 1$. Bewijs dat

$$a + b + c \geq \sqrt{\frac{(a+2)(b+2)(c+2)}{3}}.$$