Selectietoets

vrijdag 8 maart 2013

Opgave 1. In trapezium $ABCD$ is $AB \parallel CD$. Zij M het midden van diagonaal AC. Neem aan dat driehoeken ABM en ACD dezelfde oppervlakte hebben. Bewijs dat $DM \parallel BC$.

Opgave 2. Gegeven is een drietal verschillende positieve gehele getallen (a, b, c) met $a + b + c = 2013$. Een *stap* bestaat uit het vervangen van het drietal (x, y, z) door het drietal $(y + z - x, z + x - y, x + y - z)$. Bewijs dat we uitgaande van het drietal (a, b, c) na 10 stappen een drietal krijgen dat minstens één negatief getal bevat.

Opgave 3. Vind alle drietallen (x, n, p) van positieve gehele getallen x en n en priemgetallen p waarvoor geldt

$$x^3 + 3x + 14 = 2 \cdot p^n.$$

Opgave 4. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x + yf(x)) = f(xf(y)) - x + f(y + f(x))$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 5. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek met $|AD| = |BD|$. Zij M het snijpunt van AC en BD. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle BCM$. Zij N het tweede snijpunt van AC met de omgeschreven cirkel van $\triangle BMI$. Bewijs dat $|AN| \cdot |NC| = |CD| \cdot |BN|$.