Toets 9 juni 2012

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Voor positieve gehele getallen a en b definiëren we $a \ominus b = \dfrac{a-b}{\text{ggd}(a,b)}$. Bewijs dat voor elk geheel getal $n > 1$ geldt: n is een priemmacht (d.w.z. dat n te schrijven is als $n = p^k$ met p een priemgetal en k een positief geheel getal) dan en slechts dan als voor alle positieve gehele $m < n$ geldt dat $\text{ggd}(n, n \ominus m) = 1$.

Opgave 2. We hebben twee dozen met ballen. In de ene doos zitten m ballen, in de andere doos n ballen, waarbij $m, n > 0$. Twee verschillende handelingen zijn toegestaan:

(i) Verwijder uit beide dozen een gelijk aantal ballen.

(ii) Vergroot het aantal ballen in één van de dozen met een factor k.

Is het altijd mogelijk om alle ballen uit beide dozen te verwijderen met deze twee handelingen,

a) als $k = 2$?

b) als $k = 3$?

Opgave 3. Bepaal alle paren (x, y) van positieve gehele getallen die voldoen aan

$$x + y + 1 \mid 2xy \qquad \text{en} \qquad x + y - 1 \mid x^2 + y^2 - 1.$$

Opgave 4. Gegeven is een driehoek ABC. De bissectrice van $\angle CAB$ snijdt BC in L. Op het inwendige van zijden AC en AB liggen respectievelijk de punten M en N, zodat AL, BM en CN door één punt gaan en zodat $\angle AMN = \angle ALB$. Bewijs dat $\angle NML = 90°$.

Opgave 5. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f\big(x + xy + f(y)\big) = \big(f(x) + \tfrac{1}{2}\big)\big(f(y) + \tfrac{1}{2}\big)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.