Uitwerkingen toets 6 juni 2012

Opgave 1. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC. Een lijn door I snijdt het inwendige van lijnstuk AB in M en het inwendige van lijnstuk BC in N. We nemen aan dat BMN een scherphoekige driehoek is. Laat nu K en L punten op lijnstuk AC zijn zodat $\angle BMI = \angle ILA$ en $\angle BNI = \angle IKC$.
Bewijs dat $|AM| + |KL| + |CN| = |AC|$.

Oplossing. Noem D, E en F de voetpunten van I op respectievelijk BC, CA en AB. Er geldt dat N tussen C en D ligt: als namelijk N tussen D en B ligt, dan is $\angle BNI$ groter dan $\angle BDI = 90°$, maar gegeven is dat $\triangle BMN$ scherphoekig is. Dus N ligt tussen C en D. Zo ook ligt M tussen A en F. Verder kan L niet tussen A en E liggen, want dan zou $\angle ILA > 90°$, terwijl juist $\angle ILA = \angle BMI < 90°$. Dus L ligt tussen E en C. Zo ook ligt K tussen A en E. Al met al ligt E tussen K en L.
Er geldt

$$|AC| = |AE| + |CE| = |AF| + |CD| = |AM| + |MF| + |CN| + |ND|,$$

waarbij het tweede =-teken geldt omdat de raaklijnstukjes aan de ingeschreven cirkel even lang zijn.
Verder is $\angle IKE = \angle IKC = \angle BNI = \angle DNI$ en $\angle KEI = 90° = \angle IDN$, dus $\triangle IKE \sim \triangle IND$ (hh). Omdat lijnstukken EI en DI beide de straal van de ingeschreven cirkel zijn, zijn deze even lang, dus geldt zelfs $\triangle IKE \cong \triangle IND$. Hieruit volgt $|EK| = |ND|$.
Zo ook kunnen we afleiden dat $|EL| = |MF|$. We krijgen dus

$$|AC| = |AM|+|MF|+|ND|+|CN| = |AM|+|EL|+|EK|+|CN| = |AM|+|KL|+|CN|.$$

$\square$

Opgave 2. Laat a, b, c en d positieve reële getallen zijn. Bewijs dat

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0.$$

Oplossing. Er geldt

$$\frac{a-b}{b+c}=\frac{a-b+b+c}{b+c}-1=\frac{a+c}{b+c}-1.$$

Door hetzelfde met de andere drie breuken te doen en daarna de vier keer -1 naar de andere kant te halen, krijgen we dat we moeten bewijzen:

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\geq 4. \tag{1}$$

Nu passen we de ongelijkheid van het harmonisch en rekenkundig gemiddelde toe op de twee positieve getallen $b+c$ en $d+a$:

$$\frac{2}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}}\leq\frac{(b+c)+(d+a)}{2},$$

dus

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\geq\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Zo ook geldt

$$\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{4}{a+b+c+d}.$$

Hiermee kunnen we de linkerkant van (1) afschatten:

$$\begin{aligned}\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}&=(a+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{c+d}+\frac{1}{a+b}\right)\\&\geq(a+c)\cdot\frac{4}{a+b+c+d}+(b+d)\cdot\frac{4}{a+b+c+d}\\&=4\cdot\frac{(a+c)+(b+d)}{a+b+c+d}\\&=4.\end{aligned}$$

Daarmee hebben we (1) bewezen. $\square$

Opgave 3. Bepaal alle positieve gehele getallen die niet geschreven kunnen worden als $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ met a, b positief en geheel.

Oplossing. Er geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = \frac{2ab + a + b}{b(b+1)}.$$

Neem aan dat dit gelijk is aan een geheel getal n. Dan geldt $b \mid 2ab + a + b$ en $b + 1 \mid 2ab + a + b$. Uit het eerste volgt $b \mid a$ en dus ook $b \mid a - b$. Uit het tweede volgt $b+1 \mid (2ab + a + b) - (b+1) \cdot 2a = -a + b$, dus ook $b+1 \mid a - b$. Omdat de ggd van b en $b+1$ gelijk aan 1 is, mogen we hieruit concluderen dat $b(b+1) \mid a - b$. We kunnen a dus schrijven als $a = b(b+1) \cdot k + b$. Omdat a positief moet zijn, moet k hier een niet-negatief geheel getal zijn. Dit vullen we in:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2ab + a + b}{b(b+1)} \\ &= \frac{2 \cdot \big(b(b+1) \cdot k + b\big) \cdot b + \big(b(b+1) \cdot k + b\big) + b}{b(b+1)} \\ &= \frac{b(b+1) \cdot (2kb + k) + 2b^2 + 2b}{b(b+1)} \\ &= (2b+1)k + 2. \end{aligned}$$

Dus n is van de vorm $n = (2b+1)k + 2$. Hieruit zien we dat $n \geq 2$ (want $k \geq 0$) en dat $n - 2$ deelbaar moet zijn door een oneven getal groter dan 1 (namelijk $2b + 1 \geq 3$).
Stel omgekeerd dat voor een getal n geldt dat $n \geq 2$ en $n - 2$ is deelbaar door een oneven getal groter dan 1, zeg door $2b + 1$ met $b \geq 1$ en geheel. Dan is er dus een $k \geq 0$ met $n = (2b+1)k + 2$. Kies nu $a = b(b+1) \cdot k + b$, dan is a positief geheel en geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = \big((b+1)k + 1\big) + \big(bk + 1\big) = (2b+1)k + 2 = n.$$

We kunnen nu concluderen dat de getallen die geschreven kunnen worden als $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ met a en b positief geheel, precies de getallen $n \geq 2$ zijn waarvoor geldt dat $n - 2$ deelbaar is door een oneven getal groter dan 1. De getallen die niet zo geschreven kunnen worden, zijn dus precies 1 en de getallen $n \geq 2$ waarvoor geldt dat $n - 2$ geen oneven deler groter dan 1 heeft, oftewel waarvoor geldt dat $n - 2$ een tweemacht 2^m met $m \geq 0$ is.
We concluderen dat de getallen die niet geschreven kunnen worden als $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, precies 1 en de getallen van de vorm $2^m + 2$ met $m \geq 0$ zijn. $\square$

Opgave 4. Zij n een positief geheel getal deelbaar door 4. We bekijken permutaties $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ van $(1, 2, \ldots, n)$ met de volgende eigenschap: voor elke j geldt dat als we $i = a_j$ nemen, dan $a_i + j = n + 1$. Bewijs dat er precies $\dfrac{(\frac{1}{2}n)!}{(\frac{1}{4}n)!}$ zulke permutaties zijn.

Oplossing. Zij $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Stel dat $a_t = t$, dan kunnen we $i = j = t$ kiezen en geldt dus $a_t + t = n + 1$, dus $2t = n + 1$. Maar n is deelbaar door 4, dus $n + 1$ is oneven. Tegenspraak. Stel nu dat $a_t = n + 1 - t$. Dan kunnen we $i = n + 1 - t$ en $j = t$ kiezen en geldt dus $a_{n+1-t} + t = n + 1$, dus $a_{n+1-t} = n + 1 - t$. We hebben echter net gezien dat dit niet kan voorkomen.
Stel nu dat $a_t = u$ met $u \neq t$, $u \neq n + 1 - t$. Dan kunnen we $i = u$ en $j = t$ kiezen en geldt dus $a_u + t = n + 1$, dus $a_u = n + 1 - t$. Vervolgens kunnen we $i = n + 1 - t$ en $j = u$ kiezen en geldt dus $a_{n+1-t} = n + 1 - u$. Nu kiezen we $i = n + 1 - u$ en $j = n + 1 - t$ en zien we dat $a_{n+1-u} = n + 1 - (n + 1 - t) = t$. Al met al hebben we dus:

$$\begin{aligned} a_t &= u, \\ a_u &= n + 1 - t, \\ a_{n+1-t} &= n + 1 - u, \\ a_{n+1-u} &= t. \end{aligned}$$

Omdat $u \neq t$ en $u \neq n+1-t$, zijn de vier getallen aan de rechterkant allemaal verschillend. Verder zijn de vier getallen op te delen in twee paren van de vorm $(v, n+1-v)$. We hebben nu dus vier getallen waarvoor geldt dat op dezelfde posities in de permutatie dezelfde vier getallen staan, maar in een andere volgorde. We kunnen nu een t' ongelijk aan één van deze vier getallen kiezen en een u' met $a_{t'} = u'$ en op dezelfde manier een viertal vinden waar t' in zit. Merk op dat nu $n + 1 - t'$ en $n + 1 - u'$ niet al in het eerste viertal kunnen zitten, want dan zouden u' en t' er ook al in zitten. Zo kunnen we doorgaan totdat alle n getallen opgedeeld zijn in viertallen.
We zien dat we precies alle permutaties kunnen maken door het volgende recept toe te passen:

- Kies het kleinste getal k waarvoor a_k nog niet bepaald is. Neem $a_k = u$ voor een zekere u waarvan a_u nog niet bepaald was en waarvoor geldt $u \neq k$, $u \neq n + 1 - k$. Dit bepaalt ook de waarden van a_u, a_{n+1-u} en a_{n+1-k}.
- Herhaal de vorige stap net zo vaak totdat alle waarden a_k bepaald zijn.

Bij de eerste k hebben we voor u nog $n - 2$ mogelijkheden. Bij de volgende stap hebben we nog $n - 6$ mogelijkheden. Bij de stap daarna nog $n - 10$, enzovoorts. Dus het aantal permutaties dat aan deze eigenschap voldoet, is

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (n - 10) \cdot (n - 6) \cdot (n - 2).$$

Schrijf $n = 4m$, dan kunnen we dit schrijven als

$$2^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-5) \cdot (2m-3) \cdot (2m-1) = 2^m \cdot \frac{(2m)!}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)}$$

$$= \frac{(2m)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{(2m)!}{m!} = \frac{(\frac{1}{2}n)!}{(\frac{1}{4}n)!}.$$

$\square$

Opgave 5. Zij Γ de omgeschreven cirkel van de scherphoekige driehoek ABC. De bissectrice van hoek ABC snijdt AC in het punt B_1 en de korte boog AC van Γ in het punt P. De lijn door B_1 loodrecht op BC snijdt de korte boog BC van Γ in K. De lijn door B loodrecht op AK snijdt AC in L.
Bewijs dat K, L en P op een lijn liggen.

Oplossing. Dat de bissectrice van hoek ABC de korte boog AC snijdt in P, betekent dat P precies midden in deze boog AC ligt. We moeten bewijzen dat KL ook door P gaat, dus dat KL de boog AC doormidden snijdt. Omdat K op Γ ligt, betekent dat dat we moeten bewijzen dat KL de bissectrice van $\angle AKC$ is.
Noem S het snijpunt van B_1K en BC en noem T het snijpunt van BL en AK. Dan is $\angle BSK = 90°$ en $\angle BTK = 90°$, dus $BTSK$ is een koordenvierhoek. Hieruit volgt

$$\angle CBL = \angle SBT = \angle SKT = \angle B_1KA. \tag{2}$$

Omdat $ABKC$ een koordenvierhoek is, geldt $\angle B_1AK = \angle CAK = \angle CBK$. Volgens de buitenhoekstelling is $\angle LB_1K = \angle B_1AK + \angle B_1KA$, dus geldt met behulp van (2) dat

$$\angle LB_1K = \angle B_1AK + \angle B_1KA = \angle CBK + \angle CBL = \angle LBK.$$

Hieruit volgt dat $LKBB_1$ een koordenvierhoek is, wat weer betekent dat $\angle LBB_1 = \angle LKB_1$. Als we hier gelijkheid (2) bij optellen, krijgen we

$$\angle CBB_1 = \angle CBL + \angle LBB_1 = \angle B_1KA + \angle LKB_1 = \angle LKA.$$

Dus

$$\angle LKA = \angle CBB_1 = \tfrac{1}{2}\angle CBA = \tfrac{1}{2}\angle CKA,$$

waarbij we nog gebruikt hebben dat $ABKC$ een koordenvierhoek is. Hieruit volgt dat KL de bissectrice van $\angle AKC$ is, wat we wilden bewijzen. $\square$