Uitwerkingen toets 11 juni 2011

Opgave 1. Laat $n \geq 2$ en $k \geq 1$ gehele getallen zijn. In een land zijn n steden en tussen elk paar steden is een busverbinding in twee richtingen. Laat A en B twee verschillende steden zijn. Bewijs dat het aantal manieren waarop je van A naar B kunt reizen met precies k bussen gelijk is aan

$$\frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}.$$

Oplossing. Zij $\alpha(k)$ het aantal manieren om van stad A naar stad $B \neq A$ te reizen met k bussen. Zij $\beta(k)$ het aantal manieren om van stad A naar stad A te reizen met k bussen. Als we beginnen in stad A en daarna k keer een bus nemen, dan kan dat op $(n-1)^k$ manieren. In $\beta(k)$ van de gevallen komen we uit bij stad A en in $(n-1)\alpha(k)$ van de gevallen bij een andere stad dan A. Dus

$$(n-1)\alpha(k) + \beta(k) = (n-1)^k. \tag{1}$$

Neem nu even $k \geq 2$. Om van stad A naar stad A te reizen met precies k bussen, nemen we een bus van A naar een willekeurige stad (dit kan op $(n-1)$ manieren); vervolgens moeten we van een stad ongelijk aan A naar stad A reizen met $k-1$ bussen, wat kan op $\alpha(k-1)$ manieren. Dus

$$\beta(k) = (n-1)\alpha(k-1) \qquad \text{voor } k \geq 2. \tag{2}$$

We vullen nu deze uitdrukking voor $\beta(k)$ in in (1). Hiermee vinden we voor $k \geq 2$ dat

$$(n-1)\alpha(k) + (n-1)\alpha(k-1) = (n-1)^k$$

en dus

$$\alpha(k) = (n-1)^{k-1} - \alpha(k-1). \tag{3}$$

We gaan nu met inductie naar k bewijzen dat voor $n \geq 2$ en $k \geq 1$ geldt

$$\alpha(k) = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}.$$

Voor $k = 1$ staat hier $\alpha(1) = \frac{(n-1)+1}{n} = 1$ en dat klopt, omdat er precies één manier is om van stad A naar stad $B \neq A$ te reizen met één bus. Zij nu $m \geq 1$ geheel en stel nu dat we de uitdrukking voor $\alpha(k)$ bewezen hebben voor $k = m$. Dan geldt, gebruikmakend van (3), voor $k = m+1 \geq 2$ dat

$$\begin{aligned}\alpha(m+1) &= (n-1)^m - \alpha(m) = (n-1)^m - \frac{(n-1)^m - (-1)^m}{n} \\ &= \frac{n(n-1)^m - (n-1)^m + (-1)^m}{n} = \frac{(n-1)^{m+1} - (-1)^{m+1}}{n}\end{aligned}$$

en dat is precies de uitdrukking die we wilden bewijzen voor $k = m+1$. Dit voltooit de inductie. $\square$

Opgave 2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing. Invullen van $x = 0$ en $y = 0$ geeft $0 = f(0)^2$, dus $f(0) = 0$. Invullen van $x = 1$ en $y = -1$ geeft $f(0) = f(1) + f(1)f(-1)$, dus $0 = f(1)\big(1 + f(-1)\big)$, dus $f(1) = 0$ of $f(-1) = -1$. Invullen van $x = -1$ geeft

$$-f(-1 - y) = -f(-1) + f(1)f(y) \quad \text{voor alle } y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Stel dat $f(1) = 0$, dan staat hier $-f(-1 - y) = -f(-1)$ en omdat $-1 - y$ alle waarden in $\mathbb{R}$ kan aannemen, betekent dit dat f constant is. Omdat $f(0) = 0$, moet dan wel gelden $f(x) = 0$ voor alle x. Het is duidelijk dat deze functie voldoet aan de oorspronkelijke vergelijking. We hebben dus de eerste oplossing gevonden: $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
Neem nu verder aan dat $f(1) \neq 0$, zodat $f(-1) = -1$. Vul nu $y = -1$ in in (4), dan krijgen we $-f(0) = -f(-1) + f(1)f(-1)$, dus $0 = 1 - f(1)$, dus $f(1) = 1$. Invullen van $x = 1$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft

$$f(1 + y) = 1 + f(y) \quad \text{voor alle } y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Verder geeft $y = -1$ in de oorspronkelijke vergelijking dat $xf(0) = xf(x) - f(x^2)$, dus

$$xf(x) = f(x^2) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

De oorspronkelijke vergelijking kunnen we nu schrijven als

$$xf(x + xy) = xf(x) + xf(x)f(y) = xf(x)(1 + f(y)).$$

Als $x \neq 0$, kunnen we links en rechts delen door x en geeft het toepassen van (5)

$$f(x + xy) = f(x)f(1 + y) \quad \text{voor } x \neq 0.$$

Merk op dat dit ook waar is voor $x = 0$. Noem nu $z = 1 + y$. Omdat dit alle waarden in $\mathbb{R}$ kan aannemen, krijgen we

$$f(xz) = f(x)f(z) \quad \text{voor alle } x, z \in \mathbb{R}.$$

Als we dit toepassen op (6), vinden we

$$xf(x) = f(x^2) = f(x)f(x),$$

dus voor alle x geldt $f(x) = 0$ of $f(x) = x$. Stel nu dat er een $x \neq 0$ is met $f(x) = 0$, dan geldt

$$1 = f(1) = f(x \cdot \tfrac{1}{x}) = f(x)f(\tfrac{1}{x}) = 0,$$

tegenspraak. Dus voor alle $x \neq 0$ geldt $f(x) = x$. Ook voor $x = 0$ is dit waar. Invullen in de oorspronkelijke vergelijking laat zien dat dit een oplossing is. De twee functies die voldoen zijn dus $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $f(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Opgave 3. Laat Γ_1 en Γ_2 twee snijdende cirkels met middelpunten respectievelijk O_1 en O_2 zijn, zodat Γ_2 het lijnstuk O_1O_2 snijdt in een punt A. De snijpunten van Γ_1 en Γ_2 zijn C en D. De lijn AD snijdt Γ_1 een tweede keer in S. De lijn CS snijdt O_1O_2 in F. Laat Γ_3 de omgeschreven cirkel van driehoek ADF zijn. Noem E het tweede snijpunt van Γ_1 en Γ_3.
Bewijs dat O_1E raakt aan Γ_3.

Oplossing I. We gaan $\angle O_1EA$ berekenen. Omdat driehoek O_1ED gelijkbenig is met top O_1 en omdat $AEFD$ een koordenvierhoek is, geldt

$$\angle O_1EA = \angle O_1ED - \angle AED = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle EO_1D - \angle AFD. \tag{7}$$

Verder is

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\angle EO_1D &= \angle ESD && \text{middelpunts-omtrekshoekstelling op } \Gamma_1\\
&= \angle CSD - \angle CSE \\
&= \angle CSD - \angle CDE && \text{omtrekshoekstelling in koordenvierhoek } CSDE\\
&= \angle FCD - \angle SDC - \angle CDE && \text{buitenhoekstelling in } \triangle CSD\\
&= \angle FCD - \angle SDE \\
&= \angle FCD - \angle ADE \\
&= \angle FCD - \angle AFE. && \text{omtrekshoekstelling in koordenvierhoek } AEFD
\end{aligned}$$

Hieruit volgt nu samen met (7) dat

$$\angle O_1EA = 90^\circ - \angle FCD + \angle AFE - \angle AFD. \tag{8}$$

De lijn O_1O_2 staat loodrecht CD en deelt het lijnstuk CD middendoor, dus het is de middelloodlijn van CD. Dus F ligt op de middelloodlijn van CD, waaruit volgt dat driehoek CDF gelijkbenig is met top F. Dus

$$\angle FCD = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle CFD = 90^\circ - \angle AFD.$$

Gecombineerd met (8) geeft dit

$$\angle O_1EA = \angle AFD + \angle AFE - \angle AFD = \angle AFE.$$

Nu volgt met de raaklijnomtrekshoekstelling op Γ_3 dat O_1E raakt aan Γ_3. $\square$

Oplossing II. Het snijpunt van O_1O_2 met de boog SD van Γ_1 waar C op ligt, noemen we T. Omdat A in het inwendige van Γ_1 ligt, weten we nu

$$\begin{aligned}
\angle O_1AS &= \angle ATS + \angle TSA && \text{buitenhoekstelling in } \triangle ATS\\
&= \angle O_1TS + \angle TSD \\
&= \angle TSO_1 + \angle TSD && \triangle O_1ST \text{ is gelijkbenig met tophoek } O_1.
\end{aligned}$$

De lijn O_1O_2 staat loodrecht CD en deelt het lijnstuk CD middendoor, dus het is de middelloodlijn van CD. Dus T ligt op de middelloodlijn van CD, waaruit volgt dat de bogen TC en TD even groot zijn. Dus volgens de omtrekshoekstelling is $\angle TSD = \angle CST$. Dus

$$\angle O_1AS = \angle TSO_1 + \angle TSD = \angle TSO_1 + \angle CST = \angle CSO_1 = \angle FSO_1.$$

Dit betekent dat $\triangle O_1AS \sim \triangle O_1SF$ (hh). Hieruit volgt

$$\frac{|O_1A|}{|O_1S|} = \frac{|O_1S|}{|O_1F|},$$

dus $|O_1A| \cdot |O_1F| = |O_1S|^2 = |O_1E|^2$. Omdat A en F aan dezelfde kant van O_1 liggen, geldt zelfs $O_1A \cdot O_1F = O_1E^2$. Met de machtstelling zien we nu dat O_1E raakt aan de omgeschreven cirkel van $\triangle AFE$ en dat is Γ_3. $\square$

Opgave 4. Bewijs dat er geen oneindige rij priemgetallen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ bestaat met de eigenschap dat voor alle positieve gehele k geldt:

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{of} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

Oplossing. Stel dat er zo'n oneindige rij bestaat. Door eventueel de eerste twee elementen weg te laten, kunnen we zorgen dat het eerste priemgetal in de rij minstens 5 is. We nemen dus zonder verlies van algemeenheid aan dat $p_0 \geq 5$. Dan weten we dat $p_0 \not\equiv 0 \mod 3$.
Stel dat $p_0 \equiv 1 \mod 3$. We bewijzen dan met inductie naar k dat voor alle positieve gehele k geldt: $p_k \equiv 1 \mod 3$ en $p_k = 2p_{k-1} - 1$. Stel namelijk dat $k \geq 1$ en $p_{k-1} \equiv 1 \mod 3$. Dan is $2p_{k-1} \equiv 2 \mod 3$, dus $2p_{k-1} + 1$ is deelbaar door 3. Omdat p_k een priemgetal groter dan 3 moet zijn, geldt dus $p_k = 2p_{k-1} - 1$ en $p_k \equiv 2 - 1 \equiv 1 \mod 3$. Dit voltooit de inductie.
Als juist $p_0 \equiv 2 \mod 3$, dan kunnen we geheel analoog bewijzen dat $p_k \equiv 2 \mod 3$ en $p_k = 2p_{k-1} + 1$ voor alle positieve gehele k.
We kunnen nu een directe formule van de rij opstellen. Als $p_0 \equiv 1 \mod 3$, dan krijgen we $p_k = (p_0 - 1)2^k + 1$ voor alle $k \geq 0$. Als $p_0 \equiv 2 \mod 3$, dan krijgen we $p_k = (p_0 + 1)2^k - 1$. We kunnen deze formules weer simpel met inductie bewijzen.
Volgens de kleine stelling van Fermat geldt $2^{p_0-1} \equiv 1 \mod p_0$, dus ook $(-p_0 + 1)2^{p_0-1} \equiv 1 \mod p_0$ en $(p_0 + 1)2^{p_0-1} \equiv 1 \mod p_0$. Hieruit volgt $p_0 \mid (p_0 - 1)2^{p_0-1} + 1$ en $p_0 \mid (p_0 + 1)2^{p_0-1} - 1$. We zien dat p_0 altijd een deler is van p_{p_0-1}. Omdat ook duidelijk is dat p_{p_0-1} groter is dan p_0, volgt hieruit dat p_{p_0-1} geen priemgetal is. Tegenspraak. $\square$

Opgave 5. Vind alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met $a + b + c = 10$ zodat er a rode, b blauwe en c groene punten (allemaal verschillend) in het vlak bestaan met de volgende eigenschappen:

- voor elk rood punt en elk blauw punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 37;
- voor elk groen punt en elk rood punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 30;
- voor elk blauw punt en elk groen punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 1;

Oplossing. We maken driehoeken bestaande uit een blauw, een rood en een groen punt. Deze driehoeken mogen ook gedegenereerd zijn. In elk van de driehoeken geldt de (niet-strikte) driehoeksongelijkheid: de afstand tussen het blauwe en het rode punt is hoogstens gelijk aan de som van de afstanden tussen het blauwe en het groene en tussen het rode en het groene punt. We tellen al deze driehoeksongelijkheden bij elkaar op (één voor elke driehoek die we kunnen vormen met een blauw, een rood en een groen punt). We tellen nu elke afstand tussen een rood en een blauw punt c keer (want met een vast gekozen blauw en rood punt kun je nog c punten kiezen als derde, groene hoekpunt), elke afstand tussen een groen en een rood punt b keer en elke afstand tussen een blauw en een groen punt a keer. We krijgen dus

$$37c \leq 30b + a.$$

Omdat $a+b+c = 10$, volgt hieruit $37c \leq 30b+(10-b-c) = 10+29b-c$, dus $38c \leq 10+29b$. Oftewel

$$\frac{38c - 10}{29} \leq b. \tag{9}$$

We kunnen de driehoeksongelijkheid ook anders toepassen: de afstand tussen het groene en het rode punt is hoogstens gelijk aan de som van de afstanden tussen het rode en het blauwe en tussen het blauwe en het groene punt. Als we al deze ongelijkheden bij elkaar optellen, krijgen we

$$30b \leq 37c + a.$$

Dit geeft nu $30b \leq 37c + (10 - b - c) = 10 + 36c - b$, dus $31b \leq 10 + 36c$, oftewel

$$b \leq \frac{10 + 36c}{31}. \tag{10}$$

Combineren van (9) en (10) geeft

$$\frac{38c - 10}{29} \leq \frac{10 + 36c}{31},$$

dus $31(38c - 10) \leq 29(10 + 36c)$. Uitwerken geeft $134c \leq 600$, dus $c \leq 4$. We lopen nu één voor één de mogelijkheden voor c af.

Stel $c = 1$. Dan geeft (10) dat $b \leq \frac{46}{31} < 2$, waaruit volgt $b = 1$. We krijgen nu $(a, b, c) = (8, 1, 1)$.
Stel $c = 2$. Dan volgt uit (9) en (10) dat $2 < \frac{66}{29} \leq b \leq \frac{82}{31} < 3$, dus er is geen gehele b die voldoet.
Stel $c = 3$. Dan volgt uit (9) en (10) dat $3 < \frac{104}{29} \leq b \leq \frac{118}{31} < 4$, dus er is geen gehele b die voldoet.
Stel $c = 4$. Dan volgt uit (9) en (10) dat $4 < \frac{142}{29} \leq b \leq \frac{154}{31} < 5$, dus er is geen gehele b die voldoet.
Het enige drietal dat mogelijk zou kunnen voldoen is dus $(8, 1, 1)$. We laten nu zien dat we daadwerkelijk 8 rode punten, 1 blauw punt en 1 groen punt in het vlak kunnen kiezen zodat aan alle voorwaarden voldaan wordt. We gebruik een standaard assenstelsel. Kies voor het blauwe punt $(0, 0)$ en voor het groene punt $(1, 0)$. Kies rode punten $(i, 0)$ met $2 \leq i \leq 8$. Kies bovendien nog een rood punt zo dat dat punt samen met het groene en het blauwe punt een gelijkbenige driehoek vormt met twee zijden van lengte 2. De som van de afstanden tussen rode punten en het blauwe punt is nu $2+2+3+\cdots+8 = 37$. De som van de afstanden tussen rode punten en het groene punt is $2+1+2+\cdots+7 = 30$. De afstand tussen het blauwe punt en het groene punt is 1.
We concluderen dat de enige oplossing $(8, 1, 1)$ is. $\square$