Toets 11 juni 2011

Elke opgave is 7 punten waard.

Opgave 1. Laat $n \geq 2$ en $k \geq 1$ gehele getallen zijn. In een land zijn n steden en tussen elk paar steden is een busverbinding in twee richtingen. Laat A en B twee verschillende steden zijn. Bewijs dat het aantal manieren waarop je van A naar B kunt reizen met precies k bussen gelijk is aan

$$\frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n}.$$

Opgave 2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 3. Laat Γ_1 en Γ_2 twee snijdende cirkels met middelpunten respectievelijk O_1 en O_2 zijn, zodat Γ_2 het lijnstuk O_1O_2 snijdt in een punt A. De snijpunten van Γ_1 en Γ_2 zijn C en D. De lijn AD snijdt Γ_1 een tweede keer in S. De lijn CS snijdt O_1O_2 in F. Laat Γ_3 de omgeschreven cirkel van driehoek ADF zijn. Noem E het tweede snijpunt van Γ_1 en Γ_3.
Bewijs dat O_1E raakt aan Γ_3.

Opgave 4. Bewijs dat er geen oneindige rij priemgetallen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ bestaat met de eigenschap dat voor alle positieve gehele k geldt:

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{of} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

Opgave 5. Vind alle drietallen (a, b, c) van positieve gehele getallen met $a + b + c = 10$ zodat er a rode, b blauwe en c groene punten (allemaal verschillend) in het vlak bestaan met de volgende eigenschappen:

- voor elk rood punt en elk blauw punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 37;
- voor elk groen punt en elk rood punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 30;
- voor elk blauw punt en elk groen punt bekijken we de afstand tussen deze twee punten; de som van al deze afstanden is 1;