Uitwerkingen toets 8 juni 2011

Opgave 1. Vind alle paren (x, y) van gehele getallen die voldoen aan

$$x^2 + y^2 + 3^3 = 456\sqrt{x - y}.$$

Oplossing. Omdat links een geheel getal staat, moet rechts ook een geheel getal staan. De wortel uit een geheel getal is ofwel geheel ofwel irrationaal (maar nooit een niet-gehele breuk), dus moet $\sqrt{x-y}$ wel geheel zijn. De rechterkant van de vergelijking is deelbaar door 3, dus de linkerkant moet dat ook zijn. Dus $3 \mid x^2 + y^2$. Maar kwadraten zijn modulo 3 altijd congruent aan 0 of 1, dus dit kan alleen als $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \mod 3$. Dus x en y zijn beide deelbaar door 3. Schrijf nu $x = 3a$ en $y = 3b$ en vul dit in:

$$9a^2 + 9b^2 + 3^3 = 456\sqrt{3a - 3b}.$$

Wortels uit gehele getallen zijn in het algemeen geheel of irrationaal. Maar $\sqrt{3a - 3b}$ kan niet irrationaal zijn, want het is gelijk aan $\frac{9a^2+9b^2+3^3}{456}$, dus het is geheel. Daarom is $3a - 3b$ een kwadraat, dat ook nog deelbaar is door 3, dus moet het deelbaar door 9 zijn. We kunnen nu beide kanten van de vergelijking door 9 delen:

$$a^2 + b^2 + 3 = 152\sqrt{\frac{a-b}{3}}.$$

Schrijf $a - b = 3c^2$ en substitueer $a = b + 3c^2$:

$$9c^4 + 6c^2b + 2b^2 + 3 = 152c.$$

Omdat aan de linkerkant allemaal positieve termen staan, moet gelden $9c^4 < 152c$, dus $c^3 < \frac{152}{9} = 16 + \frac{8}{9}$. Aangezien voor $c \geq 3$ geldt: $c^3 \geq 3^3 = 27 > 16 + \frac{8}{9}$, volgt hieruit $c \leq 2$. Verder is $152c$ even, net als $6c^2b + 2b^2$, dus moet $9c^4 + 3$ ook even zijn, waardoor we zien dat c oneven moet zijn. Dus de enige mogelijkheid is $c = 1$. Als we dit invullen, krijgen we

$$9 + 6b + 2b^2 + 3 = 152,$$

oftewel

$$b^2 + 3b - 70 = 0.$$

Dit kunnen we ook schrijven als $(b-7)(b+10) = 0$. Dus $b = 7$ of $b = -10$. In het eerste geval krijgen we nu $a = b + 3c^2 = 10$ en dus $x = 30$ en $y = 21$. In het tweede geval krijgen we $a = b + 3c^2 = -7$ en dus $x = -21$ en $y = -30$. Controleren laat zien dat beide paren voldoen. Dus de oplossingen zijn $(x, y) = (30, 21)$ en $(x, y) = (-21, -30)$. $\square$

Opgave 2. We bekijken betegelingen van een rechthoekig $m \times n$-bord met 1×2-tegels. De tegels mogen zowel horizontaal als verticaal liggen, maar ze mogen elkaar niet overlappen en niet buiten het bord uitsteken. Alle velden van het bord moeten bedekt worden door een tegel.

a) Bewijs dat bij elke betegeling van een 4×2010-bord met 1×2-tegels er een rechte lijn is die het bord in twee stukken verdeelt zodat elke tegel in zijn geheel binnen één van de stukken ligt.

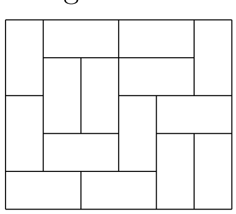
b) Bewijs dat er een betegeling van een 5×2010-bord met 1×2-tegels bestaat zodat er geen rechte lijn is die het bord in twee stukken verdeelt zodat elke tegel in zijn geheel binnen één van de stukken ligt.

Oplossing.

a) Noem een rechte lijn die het bord in twee stukken verdeelt zodat elke tegel in zijn geheel binnen één van de stukken ligt, een *scheidingslijn*. Stel dat er een betegeling bestaat waar geen scheidingslijn te vinden is. Bekijk de kolommen k en $k+1$, met $1 \leq k \leq 2009$. Er moet dan een horizontale tegel zijn die in deze twee kolommen ligt; anders is de verticale lijn tussen de kolommen een scheidingslijn. In de kolommen 1 tot en met k zitten totaal $4k$ velden, dus een even aantal. Omdat elke tegel die helemaal binnen de kolommen 1 tot en met k ligt, een even aantal velden bedekt, moet er een even aantal tegels horizontaal in kolommen k en $k+1$ liggen. We hebben gezien dat het er minstens één is en dus zijn het er minstens twee.

   Voor elke k met $1 \leq k \leq 2009$ zijn er dus twee tegels die horizontaal in kolommen k en $k+1$ liggen. Deze tegels bedekken samen $2 \cdot 2009 \cdot 2$ velden. Verder moet er nog voor elke i met $1 \leq i \leq 3$ een verticale tegel zijn die in de rijen i en $i+1$ ligt. Deze tegels bedekken samen $3 \cdot 2$ velden. Het totaal aantal velden dat bedekt wordt door al deze tegels, is dus $(2 \cdot 2009 + 3) \cdot 2 > 2 \cdot 2010 \cdot 2$. Maar het bord bevat slechts $4 \cdot 2010$ velden, tegenspraak.

b) We bewijzen met inductie naar n dat we voor alle $n \geq 3$ een $5 \times 2n$-bord kunnen betegelen zonder scheidingslijn. Voor $n = 3$ kan dit als volgt:

   Stel nu dat we een betegeling van een $5 \times 2n$-bord hebben zonder scheidingslijn. Dan liggen minstens vier tegels verticaal. Dus is er een k met $1 \leq k \leq 2n-1$ uit zodat er in kolom k een tegel verticaal ligt. Voeg nu twee kolommen in tussen kolom k en kolom $k+1$; noem deze kolommen k_1 en k_2. Elke tegel die horizontaal in kolommen k

en $k+1$ lag, vervangen we door twee horizontale tegels, één in kolommen k en k_1 en één in kolommen k_2 en $k+1$. Omdat kolom k een verticale tegel bevat, zijn nu nog niet alle velden van de kolommen k_1 en k_2 bezet. Als in een rij het veld van kolom k_1 nog niet bezet is, is in dezelfde rij het veld van kolom k_2 ook nog niet bezet. We kunnen hier dus een horizontale tegel neerleggen. Zo vullen we alle velden van de nieuwe kolommen.

Het is nu duidelijk dat er tussen geen enkel tweetal rijen een scheidingslijn ontstaan kan zijn en ook in geen enkele kolom waar niets veranderd is. Verder ligt er nu minstens één horizontale tegel in kolommen k_1 en k_2, dus er is geen scheidingslijn tussen deze twee kolommen. In het oude bord was er geen scheidingslijn tussen de kolommen k en $k+1$, dus lag er een horizontale tegel in deze kolommen. Dat betekent dat er nu een horizontale tegel in kolommen k en k_1 ligt en een horizontale tegel in kolommen k_2 en $k+1$, zodat ook tussen die twee paren kolommen geen scheidingslijn is. Het hele nieuwe bord bevat dus geen enkele scheidingslijn.

Dit voltooit de inductie. Nu volgt dat er een 5×2010-bord bestaat zonder scheidingslijn.

$\square$

Opgave 3. De cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in D en P. De gemeenschappelijke raaklijn van de twee cirkels het dichtste bij punt D raakt Γ_1 in A en Γ_2 in B. De lijn AD snijdt Γ_2 voor de tweede keer in C. Zij M het midden van lijnstuk BC.
Bewijs dat $\angle DPM = \angle BDC$.

Oplossing I. Zij S het snijpunt van PD en AB. Dan ligt S op de machtlijn van de twee cirkels en geldt dus $|SA| = |SB|$. Dus PS is een zwaartelijn in driehoek PAB.
Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling op Γ_1 met koorde AP geldt $\angle BAP = 180° - \angle ADP = \angle CDP = \angle CBP$. Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling op Γ_2 met koorde BP geldt $\angle ABP = \angle BCP$. Dus $\triangle PAB \sim \triangle PBC$ (hh). Omdat PM een zwaartelijn in driehoek PBC is, geldt $\angle SPB = \angle MPC$. Dus

$$\angle DPM = \angle DPB + \angle BPM = \angle SPB + \angle BPM = \angle MPC + \angle BPM = \angle BPC = \angle BDC.$$

□

Oplossing II. Zij S het snijpunt van PD en AB. Dan ligt S op de machtlijn van de twee cirkels en geldt dus $|SA| = |SB|$. Dus SM is een middenparallel in $\triangle ABC$. Hieruit volgt

$$\angle SMB = \angle ACB = \angle DCB = \angle DPB = \angle SPB.$$

Dus $SBMP$ is een koordenvierhoek. Dat betekent

$$\angle BPM = \angle BSM = \angle BAC. \tag{1}$$

Verder geldt wegens de raaklijnomtrekshoekstelling op koorde DB dat

$$\angle ABD = \angle BPD. \tag{2}$$

De buitenhoekstelling in $\triangle ABD$ geeft dat $\angle BDC = \angle BAC + \angle ABD$. Als we dit combineren met (1) en (2), zien we dat $\angle BDC = \angle BPM + \angle BPD = \angle DPM$. □

Opgave 4. Bepaal alle gehele getallen n waarvoor het polynoom $P(x) = 3x^3 - nx - n - 2$ te schrijven is als het product van twee niet-constante polynomen met gehele coëfficiënten.

Oplossing I. Stel dat $P(x)$ te schrijven is als $P(x) = A(x)B(x)$ met A en B niet-constante polynomen met gehele coëfficiënten. Omdat A en B niet constant zijn, hebben ze elk graad minstens 1. De som van de twee graden is gelijk aan de graad van P, dus gelijk aan 3. Dit betekent dat de twee graden 1 en 2 moeten zijn. We kunnen dus zonder verlies van algemeenheid schrijven $A(x) = ax^2 + bx + c$ en $B(x) = dx + e$ met a, b, c, d en e gehele getallen. Het product van de kopcoëfficiënten a en d is gelijk aan de kopcoëfficiënt van P, dus gelijk aan 3. Omdat we A en B ook beide met -1 zouden kunnen vermenigvuldigen, mogen we aannemen dat a en d beide positief zijn en dus in een of andere volgorde gelijk aan 1 en 3.
Stel eerst dat $d = 1$. Vul nu $x = -1$ in. Er geldt

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + n - n - 2 = -5,$$

dus

$$-5 = P(-1) = A(-1)B(-1) = A(-1) \cdot (-1 + e).$$

We zien dat $-1 + e$ een deler is van -5, dus gelijk is aan -5, -1, 1 of 5. Dat geeft vier mogelijke waarden voor e, namelijk -4, 0, 2 of 6. Verder is $x = -e$ een nulpunt van B en dus ook van P.
Als $e = -4$, dan geldt

$$0 = P(4) = 3 \cdot 4^3 - 4n - n - 2 = 190 - 5n,$$

dus $n = 38$. We kunnen dan $P(x)$ inderdaad ontbinden:

$$3x^3 - 38x - 40 = (3x^2 + 12x + 10)(x - 4).$$

Als $e = 0$, dan geldt

$$0 = P(0) = -n - 2,$$

dus $n = -2$. We kunnen dan $P(x)$ inderdaad ontbinden:

$$3x^3 + 2x = (3x^2 + 2)x.$$

Als $e = 2$, dan geldt

$$0 = P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 2n - n - 2 = -26 + n,$$

dus $n = 26$. We kunnen dan $P(x)$ inderdaad ontbinden:

$$3x^3 - 26x - 28 = (3x^2 - 6x - 14)(x + 2).$$

Als $e = 6$, dan geldt

$$0 = P(-6) = 3 \cdot (-6)^3 + 6n - n - 2 = -650 + 5n,$$

dus $n = 130$. We kunnen dan $P(x)$ inderdaad ontbinden:

$$3x^3 - 130x - 132 = (3x^2 - 18x - 22)(x + 6).$$

Stel nu dat $d = 3$. Er geldt nu

$$-5 = P(-1) = A(-1)B(-1) = A(-1) \cdot (-3 + e).$$

We zien dat $-3 + e$ een deler is van -5, dus gelijk is aan -5, -1, 1 of 5. Dat geeft vier mogelijke waarden voor e, namelijk -2, 2, 4 of 8. Verder is $x = \frac{-e}{3}$ een nulpunt van B en dus ook van P. We zien dat e nooit deelbaar is door 3. Er geldt nu

$$0 = P(\tfrac{-e}{3}) = 3 \cdot (\tfrac{-e}{3})^3 + \tfrac{e}{3}n - n - 2 = -\tfrac{e^3}{9} + \tfrac{e-3}{3}n - 2,$$

dus $\frac{e-3}{3}n = \frac{e^3}{9} + 2$, dus $(e-3)n = \frac{e^3}{3} + 6$. Maar dit geeft een tegenspraak, want links staat een geheel getal en rechts niet, aangezien 3 geen deler is van e.
We concluderen dat de oplossingen zijn: $n = 38$, $n = -2$, $n = 26$ en $n = 130$. $\square$

Oplossing II. Net als in oplossing I schrijven we schrijven $P(x) = (ax^2 + bx + c)(dx + e)$ en leiden we af dat $a = 1$ en $d = 3$, of $a = 3$ en $d = 1$. Door het vergelijken van de coëfficiënten krijgen we nog drie voorwaarden:

$$\begin{aligned} ae + bd &= 0, & (3)\\ be + dc &= -n, & (4)\\ ce &= -n - 2. & (5) \end{aligned}$$

Stel eerst dat $a = 3$ en $d = 1$. Uit (3) volgt nu $b = -3e$. Uit (4) en (5) krijgen we nu

$$\begin{aligned} -n &= -3e^2 + c,\\ -n &= ce + 2, \end{aligned}$$

dus $-3e^2 + c = ce + 2$, dus

$$c = \frac{-3e^2 - 2}{e - 1} = \frac{-3e(e-1) - 3e - 2}{e - 1} = -3e + \frac{-3(e-1) - 5}{e - 1} = -3e - 3 - \frac{5}{e - 1}.$$

Omdat c geheel moet zijn, moet $e - 1$ een deler zijn van 5 en dus gelijk zijn aan -5, -1, 1 of 5. Dat geeft vier mogelijke waarden voor e, namelijk -4, 0, 2 of 6.
Als $e = -4$, krijgen we $c = (-3)(-4) - 3 - \frac{5}{-5} = 10$ en dus $n = -10 \cdot (-4) - 2 = 38$. Als $e = 0$, krijgen we $c = (-3) \cdot 0 - 3 - \frac{5}{-1} = 2$ en dus $n = -2 \cdot 0 - 2 = -2$. Als $e = 2$, krijgen we $c = (-3) \cdot 2 - 3 - \frac{5}{1} = -14$ en dus $n = 14 \cdot 2 - 2 = 26$. Als $e = 6$, krijgen we $c = (-3) \cdot 6 - 3 - \frac{5}{5} = -22$ en dus $n = 22 \cdot 6 - 2 = 130$. Al deze waarden van n voldoen, zoals we in oplossing I hebben gezien.

Stel nu dat $a = 1$ en $d = 3$. Uit (3) volgt nu $e = -3b$. Uit (4) en (5) krijgen we nu

$$-n = -3b^2 + 3c,$$
$$-n = -3bc + 2,$$

dus $-3b^2 + 3c = -3bc + 2$. Echter, elke term van deze gelijkheid is deelbaar door 3 behalve de term 2, wat een tegenspraak is. Dit geval geeft dus geen oplossingen.
We concluderen dat de oplossingen zijn: $n = 38$, $n = -2$, $n = 26$ en $n = 130$. $\square$

Opgave 5. Zij ABC een driehoek met $|AB| > |BC|$. Zij D het midden van AC. Zij E het snijpunt van de bissectrice van $\angle ABC$ met de lijn AC. Zij F op BE zo dat CF loodrecht op BE staat. Zij verder G het snijpunt van CF en BD.
Bewijs dat DF het lijnstuk EG doormidden snijdt.

Oplossing I. Merk op dat vanwege de voorwaarde $|AB| > |BC|$ de punten D en E verschillend zijn en de volgorde van punten op de lijn AC is: A, D, E, C. Verder is $\angle BCA > \angle CAB$, dus $\angle BCA + \frac{1}{2}\angle ABC > 90°$, waaruit volgt dat F op het inwendige van BE ligt. Daarmee ligt ook G op het inwendige van BD.
Zij nu K het snijpunt van CF en AB. Omdat BE de bissectrice van $\angle ABC$ is, is $\angle KBF = \angle FBC$. Verder geldt $\angle BFK = 90° = \angle CFB$ en $|BF| = |BF|$, dus wegens (HZH) geldt $\triangle KBF \sim \triangle CBF$. Hieruit volgt $|BK| = |BC|$ en $|KF| = |CF|$. In het bijzonder is F het midden van CK. Omdat D het midden van AC is, betekent dit dat DF een middenparallel is in $\triangle AKC$, dus $DF \parallel AK$ en $|DF| = \frac{1}{2}|AK|$.
Uit $DF \parallel AB$ volgt $\triangle KGB \sim \triangle FGD$ (hh), dus

$$\frac{|DG|}{|BG|} = \frac{|FD|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{2}|AK|}{|KB|} = \frac{\frac{1}{2}(|AB| - |KB|)}{|KB|} = \frac{\frac{1}{2}(|AB| - |BC|)}{|BC|}. \qquad (6)$$

De bissectricestelling zegt dat $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|CB|}$, oftewel $\frac{|AC|-|CE|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|BC|}$. Dit geeft $|BC| \cdot (|AC| - |CE|) = |AB| \cdot |CE|$, dus $|BC| \cdot |AC| = |CE| \cdot (|AB| + |BC|)$, dus

$$|CE| = \frac{|BC| \cdot |AC|}{|AB| + |BC|}.$$

We berekenen nu verder

$$|DE| = |DC| - |CE| = \frac{1}{2}|AC| - |CE| = \frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot (|AB| + |BC|) - |AC| \cdot |BC|}{|AB| + |BC|}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot (|AB| - |BC|)}{|AB| + |BC|}.$$

Dus

$$\frac{|DE|}{|CE|} = \frac{\frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot (|AB| - |BC|)}{|AB| + |BC|}}{\frac{|BC| \cdot |AC|}{|AB| + |BC|}} = \frac{\frac{1}{2}(|AB| - |BC|)}{|BC|}.$$

Gecombineerd met (6) zien we nu dat

$$\frac{|DE|}{|CE|} = \frac{|DG|}{|BG|}.$$

In driehoek DBC betekent dit dat $EG \parallel BC$. Noem S nu het snijpunt van DF en EG. Dan weten we

$$\angle SGF = \angle EGF = \angle FCB = \angle FKB = \angle GFD = \angle GFS,$$

dus $\triangle SFG$ is gelijkbenig met $|SF| = |SG|$. Verder is

$$\angle SEF = \angle GEF = 90^\circ - \angle EGF = 90^\circ - \angle GFS = \angle SFE,$$

dus ook $\triangle SFE$ is gelijkbenig met $|SF| = |SE|$. We concluderen dat $|SG| = |SE|$, dus dat S het midden van EG is. $\square$

Oplossing II. Net als in bovenstaande oplossing leiden we af dat $DF \parallel AK$. Daarmee wordt DF ook de middenparallel van $\triangle ABC$, dus het snijpunt H van DF en BC is het midden van BC. Zij nu G' het snijpunt van CF en de lijn door E evenwijdig aan CB. Zij T het snijpunt van DH en EG'. Omdat $EG' \parallel CB$, geldt $\triangle EG'F \sim \triangle BCF$ en ook $\triangle ETF \sim \triangle BHF$. Dus

$$\frac{|ET|}{|EG'|} = \frac{|ET|}{|EF|} \cdot \frac{|EF|}{|EG'|} = \frac{|BH|}{|BF|} \cdot \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|BH|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

We zien dat T het midden is van EG'. Als we nu bewijzen dat $G' = G$, dan weten we direct dat DF het lijnstuk EG doormidden snijdt en zijn we dus klaar.
Vanwege $EG' \parallel CB$ geldt $\triangle DTE \sim \triangle DHC$, dus

$$\frac{|EG'|}{|CB|} = \frac{2|ET|}{2|CH|} = \frac{|ET|}{|CH|} = \frac{|ED|}{|CD|}.$$

Met (zhz) zien we nu dat $\triangle EDG' \sim \triangle CDB$. Hieruit volgt $\angle EDG' = \angle CDB$, dus G' ligt op de lijn DB. Dus G' is het snijpunt van DB en CF en daarmee gelijk aan G. $\square$

Oplossing III. De middelloodlijn van AC (de lijn door D loodrecht op AC) snijdt de bissectrice van hoek $\angle ABC$ op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, want ze snijden allebei de boog AC in twee gelijke stukken. Noem dit snijpunt S. Omdat $\angle CFS$ en $\angle CDS$ allebei 90° zijn, is $CFDS$ een koordenvierhoek volgens Thales. Hiermee vinden we $\angle FDC = \angle FSC = \angle BSC = \angle BAC$, dus $DF \parallel AB$ wegens F-hoeken.
Noem het midden van zijde BC nu H. Omdat DH een middenparallel is in driehoek ABC is DH ook evenwijdig aan AB. Dus DF en DH zijn dezelfde lijn, oftewel: D, F en H liggen op één lijn. Nu geeft de stelling van Ceva op $\triangle BCD$ met de punten E, G en H, dat

$$1 = \frac{|CE|}{|ED|}\frac{|DG|}{|GB|}\frac{|BH|}{|HC|} = \frac{|CE|}{|ED|}\frac{|DG|}{|GB|}.$$

Daaruit volgt $\frac{|DG|}{|GB|} = \frac{|DE|}{|EC|}$. Wegens evenredigheid leiden we hieruit af dat GE evenwijdig is aan BC. Omdat DF het lijnstuk BC midden doorsnijdt, snijdt zij dus ook GE middendoor. $\square$