Uitwerkingen toets 18 maart 2011

Opgave 1. Alle positieve gehele getallen worden rood of groen gekleurd, zodat aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

- Er zijn zowel rode als groene getallen.
- De som van drie (niet noodzakelijk verschillende) rode getallen is rood.
- De som van drie (niet noodzakelijk verschillende) groene getallen is groen.

Vind alle mogelijke kleuringen die hieraan voldoen.

Oplossing. Stel dat we het getal k rood kleuren. We bewijzen met inductie naar n dat dan ook $(2n+1)k$ rood is voor alle $n \geq 0$. Voor $n = 0$ is dit natuurlijk waar. Stel dat $(2n-1)k$ rood is voor zekere n, dan is ook $k + k + (2n-1)k = (2n+1)k$ rood. Dit voltooit de inductie. Analoog geldt dat als k groen gekleurd is, dat dan ook $(2n+1)k$ groen gekleurd is voor alle $n \geq 0$.
Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat 1 rood is. Dan zijn dus alle oneven getallen rood. Stel nu dat er ook een even getal $2m$ is dat rood is. Omdat nu 1 en $2m$ beide rood zijn, kunnen we weer makkelijk met inductie laten zien dat $2m + 2n$ rood is voor alle $n \geq 0$. Er zijn nu nog maar eindig veel getallen over die groen kunnen zijn, namelijk de even getallen kleiner dan $2m$. Echter, als één van die getallen groen is, dan moeten ook alle oneven veelvouden van dat getal groen zijn en dat zijn er oneindig veel, tegenspraak. Als anderzijds geen van die getallen groen is, dan hebben we een tegenspraak met de eerste voorwaarde. We concluderen dat er geen even getal is dat rood is. Dus alle even getallen zijn groen.
Deze kleuring voldoet ook aan alle voorwaarden: de som van drie oneven getallen is altijd oneven en de som van drie even getallen is altijd even, waaruit blijkt dat aan de tweede en derde voorwaarde voldaan is. Aan de eerste voorwaarde is duidelijk ook voldaan.
De enige mogelijke kleuringen zijn dus: alle even getallen groen en alle oneven getallen rood, of alle oneven getallen groen en alle even getallen rood. $\square$

Opgave 2. In de scherphoekige driehoek ABC is $\angle C$ groter dan $\angle A$. Zij E zodat AE een middellijn is van de omgeschreven cirkel Γ van $\triangle ABC$. Zij K het snijpunt van AC en de raaklijn in B aan Γ. Zij L het voetpunt van de loodlijn vanuit K op AE en zij D het snijpunt van KL en AB.
Bewijs dat CE de bissectrice van $\angle BCD$ is.

Oplossing I. Door de voorwaarden in de opgave ligt de configuratie vast. Omdat $\angle LAD = \angle EAB = \angle ECB$ vanwege de omtrekshoekstelling op koorde EB van Γ, geldt

$$\angle BDK = \angle ADL = 180^\circ - \angle DLA - \angle LAD = 90^\circ - \angle LAD = 90^\circ - \angle ECB$$

$$= \angle ECA - \angle ECB = \angle BCA = 180^\circ - \angle BCK.$$

Hieruit volgt dat $BDKC$ een koordenvierhoek is. Dus $\angle BCD = \angle BKD$. We gaan nu bewijzen dat $\angle BKD = 2\angle BCE$, waaruit het gevraagde volgt.
Vanwege de raaklijnomtrekshoekstelling geldt $\angle EBK = \angle BCE$, dus $\angle ABK = \angle ABE + \angle EBK = 90^\circ + \angle BCE$. Met de hoekensom in driehoek ABK zien we vervolgens dat

$$\angle AKB = 180^\circ - (90^\circ + \angle BCE) - \angle BAK = 90^\circ - \angle BCE - \angle BAK.$$

De omtrekhoekstelling vertelt ons dat $\angle BAK = \angle EAK + \angle BAE = \angle EAK + \angle BCE$, dus we vinden dat

$$\angle AKB = 90^\circ - 2\angle BCE - \angle EAK = 90^\circ - 2\angle BCE - \angle LAK.$$

Uit de hoekensom in driehoek AKL volgt dat $\angle AKL = 90^\circ - \angle LAK$, dus

$$\angle AKB = \angle AKL - 2\angle BCE.$$

Dit geeft

$$\angle BKD = \angle AKL - \angle AKB = 2\angle BCE,$$

wat is wat we wilden bewijzen. $\square$

Oplossing II. Omdat AE een middellijn is, geldt wegens de stelling van Thales dat $\angle EBA = 90^\circ$ en ook $\angle ECA = 90^\circ$. Verder geldt natuurlijk $\angle KLA = 90^\circ$. Dus volgens de stelling van Thales liggen B en L op de cirkel met middellijn DE, dus is $BDLE$ een koordenvierhoek. Wegens de rechte hoeken bij C en L is zo ook $CKLE$ een koordenvierhoek.
We passen de machtstelling toe op het punt A en de koordenvierhoek $BDLE$: er geldt $AB \cdot AD = AE \cdot AL$. De machtstelling op punt A en koordenvierhoek $CKLE$ geeft juist $AE \cdot AL = AC \cdot AK$. Combineren van beide geeft dat $AB \cdot AD = AC \cdot AK$. Daaruit volgt met alweer de machtstelling vanuit punt A dat $BDKC$ een koordenvierhoek is. Vanaf hier kunnen we het bewijs vervolgen als in oplossing 1. $\square$

Opgave 3. Vind alle drietallen reële getallen (x, y, z) die voldoen aan

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = xy + yz + zx + |x - 2y + z|.$$

Oplossing I. We herschrijven de gegeven vergelijking als

$$\tfrac{1}{2}x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - yz + \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z^2 - zx + \tfrac{1}{2}x^2 + 1 = |x - 2y + z|,$$

oftewel als

$$\tfrac{1}{2}(x-y)^2 + \tfrac{1}{2}(y-z)^2 + \tfrac{1}{2}(z-x)^2 + 1 = |(x-y) + (z-y)|. \tag{1}$$

Substitueer nu $a = x - y$ en $b = z - y$. Dan geldt $x - z = a - b$, dus krijgen we

$$\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + 1 = |a+b|. \tag{2}$$

Uit $(a-b)^2 \geq 0$ volgt $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, dus $2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab$, wat betekent dat $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ met gelijkheid dan en slechts dan als $a = b$. Verder geldt natuurlijk ook $(a-b)^2 \geq 0$. Dus

$$|a+b| = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{4} + 1.$$

Schrijf nu $c = |a+b|$, dan staat hier

$$c \geq \frac{c^2}{4} + 1.$$

Dit kunnen we herschrijven naar $c^2 - 4c + 4 \leq 0$, oftewel $(c-2)^2 \leq 0$. Omdat links een kwadraat staat, moet hier wel gelijkheid gelden, dus $c = 2$. Verder moet nu ook in onze eerdere afschatting gelijkheid gelden, dus $a = b$. Dit invullen in (2) geeft $a^2 + 1 = 2$, dus $a = \pm 1$. Zo vinden we de drietallen $(y+1, y, y+1)$ en $(y-1, y, y-1)$ voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$. Invullen in de vergelijking (1) (die equivalent is aan de oorspronkelijke vergelijking) laat zien dat deze drietallen inderdaad oplossingen zijn voor alle $y \in \mathbb{R}$. Alle oplossingen worden dus gegeven door $(y+1, y, y+1)$ en $(y-1, y, y-1)$ met $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Oplossing II. Leid net als hierboven vergelijking (2) af. Merk nu op dat $|a+b| \leq |a| + |b|$ volgens de driehoeksongelijkheid, dus

$$\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)^2 + 1 = |a+b| \leq |a| + |b|.$$

Dit kunnen we herschrijven als

$$\tfrac{1}{2}(|a|-1)^2 + \tfrac{1}{2}(|b|-1)^2 + \tfrac{1}{2}(a-b)^2 \leq 0.$$

Links staat de som van drie kwadraten, dus deze moeten allemaal gelijk aan 0 zijn. Dus $|a| = 1$, $|b| = 1$ en $a = b$. Zo vinden we weer de drietallen $(y+1, y, y+1)$ en $(y-1, y, y-1)$ voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$. Zie verder eerste oplossing. $\square$

Oplossing III. We onderscheiden twee gevallen: $x - 2y + z \geq 0$ of $x - 2y + z < 0$. In het eerste geval wordt de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = xy + yz + zx + x - 2y + z.$$

We kunnen dit beschouwen als kwadratische vergelijking in x:

$$x^2 + (-y - z - 1)x + (y^2 + z^2 + 1 - yz + 2y - z) = 0.$$

We berekenen hiervan de discriminant:

$$D = (-y - z - 1)^2 - 4(y^2 + z^2 + 1 - yz + 2y - z) = -3y^2 - 3z^2 - 3 + 6yz - 6y + 6z$$

$$= -3(y^2 + z^2 + 1 - 2yz + 2y - 2z) = -3(y - z + 1)^2.$$

We zien dat $D \leq 0$, terwijl de kwadratische vergelijking alleen een oplossing heeft als $D \geq 0$. Er moet dus gelden $D = 0$. Hieruit volgt $y - z + 1 = 0$, dus $z = y + 1$. We krijgen dan met abc-formule $x = \frac{-(-y-z-1)\pm\sqrt{0}}{2} = y + 1$. Zo vinden we het drietal $(y + 1, y, y + 1)$ voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$. We moeten hiervoor nog controleren dat $x - 2y + z \geq 0$. Dit geldt inderdaad, want $x - 2y + z = 2$. Dus dit drietal is een oplossing.
Nu bekijken we het geval $x - 2y + z < 0$. We krijgen weer een kwadratische vergelijking in x:

$$x^2 + (-y - z + 1)x + (y^2 + z^2 + 1 - yz - 2y + z) = 0.$$

Deze heeft als discriminant

$$D = (-y - z + 1)^2 - 4(y^2 + z^2 + 1 - yz - 2y + z) = -3y^2 - 3z^2 - 3 + 6yz + 6y - 6z$$

$$= -3(y^2 + z^2 + 1 - 2yz - 2y + 2z) = -3(y - z - 1)^2.$$

We zien weer $D \leq 0$, waaruit weer volgt dat $D = 0$, dus $z = y - 1$. We vinden vervolgens $x = \frac{-(-y-z+1)\pm\sqrt{0}}{2} = y - 1$. Zo vinden we het drietal $(y - 1, y, y - 1)$ voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$. Er geldt nu $x - 2y + z = -2 < 0$, dus dit drietal is een oplossing.
Al met al zijn de enige oplossingen $(y + 1, y, y + 1)$ en $(y - 1, y, y - 1)$ voor willekeurige $y \in \mathbb{R}$. $\square$

Opgave 4. Zij $n \geq 2$ een geheel getal. Zij a het grootste positieve gehele getal waarvoor geldt $2^a \mid 5^n - 3^n$. Zij b het grootste positieve gehele getal waarvoor geldt $2^b \leq n$. Bewijs dat $a \leq b + 3$.

Oplossing. We bewijzen dit allereerst voor oneven getallen n. Hiervoor geldt modulo 4 dat $5^n \equiv 1^n = 1$ en $3^n \equiv (-1)^n \equiv -1$, dus $5^n - 3^n \equiv 2 \mod 4$. Dus als n oneven is, geldt $a = 1$. Omdat $b \geq 1$, is nu voldaan aan $a \leq b + 3$.
Stel nu dat $n \equiv 2 \mod 4$. Schrijf $n = 2k$ met k een oneven positief geheel getal. Merk op dat $5^{2k} - 3^{2k} = (5^k - 3^k)(5^k + 3^k)$. We hebben net laten zien dat $5^k - 3^k$ precies één factor 2 bevat, aangezien k oneven is. We bekijken nu $5^k + 3^k$ modulo 16. Voor $m = 1, 2, 3, 4$ geldt dat 5^m modulo 16 congruent is aan respectievelijk $5, 9, 13, 1$. Omdat $5^4 \equiv 1 \mod 16$, geldt dat $5^k \equiv 5$ voor alle $k \equiv 1 \mod 4$ en $5^k \equiv 13$ voor alle $k \equiv 3 \mod 4$. Voor $m = 1, 2, 3, 4$ geldt dat 3^m modulo 16 congruent is aan respectievelijk $3, 9, 11, 1$. Omdat $3^4 \equiv 1 \mod 16$, geldt dat $3^k \equiv 3$ voor alle $k \equiv 1 \mod 4$ en $3^k \equiv 11$ voor alle $k \equiv 3 \mod 4$. Al met al zien we dat $5^k + 3^k \equiv 5 + 3 \equiv 8 \mod 16$ als $k \equiv 1 \mod 4$ en $5^k + 3^k \equiv 13 + 11 = 24 \equiv 8 \mod 16$ als $k \equiv 3 \mod 4$. In beide gevallen bevat $5^k + 3^k$ precies 3 factoren 2.
We concluderen dat voor $n \equiv 2 \mod 4$ geldt: $a = 4$. Omdat $b \geq 1$, is nu voldaan aan $a \leq b + 3$.
We bewijzen nu met inductie naar m dat $a \leq b + 3$ voor alle positieve gehele getallen n met precies $m \geq 1$ factoren 2. De inductiebasis is $m = 1$, oftewel het geval $n \equiv 2 \mod 4$. Hiervoor hebben we dit al bewezen.
Zij nu $m \geq 1$ en neem als inductiehypothese aan dat we al $a \leq b + 3$ hebben laten zien voor alle getallen n met precies m factoren 2. Bekijk nu een getal n met $m + 1$ factoren 2. We schrijven $n = 2k$, waarbij k precies m factoren 2 heeft. Laat voor de duidelijkheid $a(k)$ en $b(k)$ de a en b zijn die horen bij k, en $a(n)$ en $b(n)$ de a en b die horen bij n. De inductiehypothese zegt dat $a(k) \leq b(k) + 3$. We willen bewijzen dat $a(n) \leq b(n) + 3$.
Er geldt $5^n - 3^n = 5^{2k} - 3^{2k} = (5^k - 3^k)(5^k + 3^k)$. Omdat k even is (hij bevat $m \geq 1$ factoren 2) geldt modulo 4 dat $5^k + 3^k \equiv 1^k + (-1)^k \equiv 2 \mod 4$. Dus $5^k + 3^k$ bevat precies één factor 2. Verder bevat $5^k - 3^k$ precies $a(k)$ factoren 2. Dus $a(n) = a(k) + 1$. We weten daarnaast dat $2^{b(k)} \leq k$ en $2^{b(k)+1} > k$, waaruit volgt dat $2^{b(k)+1} \leq 2k$ en $2^{b(k)+2} > 2k$. Dus $b(n) = b(k) + 1$. Nu kunnen we concluderen: $a(n) = a(k) + 1 \leq b(k) + 3 + 1 = b(n) + 3$, waarmee de inductie voltooid is.
Dit bewijst dat $a \leq b + 3$ voor alle gehele getallen $n \geq 2$. $\square$

Opgave 5. Gegeven is een trapezium $ABCD$ met $BC \parallel AD$. Neem aan dat de bissectrices van de hoeken BAD en CDA elkaar snijden op de middelloodlijn van lijnstuk BC. Bewijs dat $|AB| = |CD|$ of $|AB| + |CD| = |AD|$.

Oplossing I. Zij M het midden van BC en zij P het snijpunt van de middelloodlijn van BC met AD. Noem K het snijpunt van MP en de twee bissectrices. Laat L en N de voetpunten zijn van K op respectievelijk zijden AB en DC. Omdat AK en DK bissectrices zijn, geldt $|KL| = |KP| = |KN|$. Verder ligt K ook op de middelloodlijn van BC, dus $|KB| = |KC|$. Omdat driehoeken BLK en CNK ook beide een rechte hoek hebben, zijn ze met (ZZR) congruent.
We onderscheiden nu vier gevallen. Bekijk eerst het geval dat L en N op het inwendige van respectievelijk zijden AB en DC liggen. Merk op dat driehoek KBC gelijkbenig is, zodat $\angle KBC = \angle BCK$. Dus geldt vanwege $\triangle BLK \cong \triangle CNK$:

$$\angle ABC = \angle LBK + \angle KBC = \angle NCK + \angle BCK = \angle BCD.$$

Hieruit volgt dat $ABCD$ een gelijkbenig trapezium is en dat dus geldt $|AB| = |CD|$.
In het geval dat L en N beide op het verlengde van de zijden AB en DC liggen, kunnen we op analoge wijze laten zien dat $|AB| = |CD|$.
Nu bekijken we het geval dat L op het inwendige van zijde AB ligt, maar N op het verlengde van zijde DC. Omdat AK en DK bissectrices zijn, geldt $|AL| = |AP|$ en $|DN| = |DP|$. Dus geldt vanwege $\triangle BLK \cong \triangle CNK$:

$$|AB| + |CD| = (|AL| + |LB|) + (|DN| - |NC|) = |AP| + |LB| + |DP| - |LB| = |AD|.$$

In het geval dat L juist op het verlengde van AB ligt en N op het inwendige van DC, laten we op analoge wijze zien dat $|AB| + |CD| = |AD|$. □

Oplossing II. Zij K het snijpunt van de middelloodlijn van BC en de twee bissectrices. Spiegel B in de lijn AK en noem het beeld E. Omdat AK een bissectrice is, ligt E op AD, geldt $|AB| = |AE|$ en is AK de middelloodlijn van BE, zodat $|KB| = |KE|$. Spiegel nu ook C in DK en noem het beeld F. Ook F ligt op AD en verder geldt $|DC| = |DF|$ en $|KC| = |KF|$. Als E en F hetzelfde punt zijn, zien we dat $|AB| + |CD| = |AE| + |FD| = |AD|$.
Stel nu dat E en F niet hetzelfde punt zijn. Omdat K op de middelloodlijn van BC ligt, geldt $|KB| = |KC|$. We wisten al $|KB| = |KE|$ en $|KC| = |KF|$, dus K ligt op gelijke afstand van de vier punten B, C, E en F. Dat betekent dat deze vier punten op een cirkel liggen. We nemen aan dat de volgorde van de punten op deze cirkel $BCFE$ is; het geval dat de volgorde $BCEF$ is, gaat analoog. Er geldt nu

$$\angle FCB = 180^\circ - \angle FEB = \angle AEB = \angle EBA.$$

Analoog geldt $\angle EBC = \angle FCD$. Dus

$$\angle BCD = \angle FCB + \angle FCD = \angle EBA + \angle EBC = \angle ABC.$$

Hieruit volgt dat $ABCD$ een gelijkbenig trapezium is en dat dus geldt $|AB| = |CD|$. $\square$