Toets 9 juni 2010

Elke opgave is 7 punten waard.

1. Zij ABC een scherphoekige driehoek met de eigenschap $\angle BAC = 45°$. Zij D het voetpunt van de loodlijn vanuit C op AB. Zij P een inwendig punt van het lijnstuk CD. Bewijs dat de lijnen AP en BC loodrecht op elkaar staan dan en slechts dan als $|AP| = |BC|$.

2. Laat A en B positieve gehele getallen zijn. Definieer de rekenkundige rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ door $a_n = An + B$. Neem aan dat er minstens één $n \geq 0$ is zodat a_n een kwadraat is. Zij M een positief geheel getal zodat M^2 het kleinste kwadraat in de rij is. Bewijs dat $M < A + \sqrt{B}$.

3. Zij $n \geq 2$ een positief geheel getal en p een priemgetal zodat $n \mid p - 1$ en $p \mid n^3 - 1$. Bewijs dat $4p - 3$ een kwadraat is.

4. Zij $ABCD$ een koordenvierhoek met de eigenschap dat $\angle ABD = \angle DBC$. Zij E het snijpunt van de diagonalen AC en BD. Zij M het midden van AE en N het midden van DC. Bewijs dat $MBCN$ een koordenvierhoek is.

5. Vind alle drietallen (x, y, z) van reële (maar niet noodzakelijk positieve) getallen die voldoen aan

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1, \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= xyz(x + y + z)^3. \end{aligned}$$