Toets maart 2010

Elke opgave is 7 punten waard.

1. Zij $ABCD$ een trapezium met $AB \parallel CD$, $2|AB| = |CD|$ en $BD \perp BC$. Zij M het midden van CD en zij E het snijpunt van BC en AD. Zij O het snijpunt van AM en BD. Zij N het snijpunt van OE en AB.

   (a) Bewijs dat $ABMD$ een ruit is.

   (b) Bewijs dat de lijn DN door het midden van lijnstuk BE gaat.

2. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

   voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Zij N het aantal geordende vijftallen $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ van positieve gehele getallen waarvoor geldt

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 1.$$

   (Bij geordende vijftallen doet de volgorde er toe, dus $(2, 3, 15, 15, 30)$ en $(15, 2, 15, 3, 30)$ zijn verschillende geordende vijftallen.)

   Is N een even of een oneven getal?

4. De twee cirkels Γ_1 en Γ_2 snijden elkaar in P en Q. De gemeenschappelijke raaklijn aan de kant van P raakt de cirkels in A resp. B. De raaklijn aan Γ_1 in P snijdt Γ_2 voor de tweede keer in C en de raaklijn aan Γ_2 in P snijdt Γ_1 voor de tweede keer in D. Het snijpunt van de lijnen AP en BC noemen we E en het snijpunt van de lijnen BP en AD noemen we F. Zij M de puntspiegeling van P in het midden van AB. Bewijs dat $AMBEQF$ een koordenzeshoek is.

5. Voor een niet-negatief geheel getal n noemen we een permutatie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ van $\{0, 1, \ldots, n\}$ *kwadratisch* als $k + a_k$ een kwadraat is voor $k = 0, 1, \ldots, n$. Bewijs dat er voor elke niet-negatieve gehele n een kwadratische permutatie van $\{0, 1, \ldots, n\}$ bestaat.