TOETS TRAININGSKAMP

Valkenswaard, 7 juni 2008

1. Vind alle functies $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ die voldoen aan
$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$
voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

2. Julian en Johan spelen een spel met een even aantal, zeg $2n$, kaarten ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$). Op elke kaart staat een positief geheel getal. De kaarten worden geschud en in een rij op tafel gelegd met de getallen zichtbaar. Een speler die aan de beurt is, mag ofwel de meest linker kaart ofwel de meest rechter kaart pakken. De spelers zijn om en om aan de beurt.
Johan begint, dus Julian pakt uiteindelijk de laatste kaart. De *score* van Johan is de som van de getallen op de $n$ kaarten die hij heeft gepakt en voor Julian net zo.
Bewijs dat Johan altijd een minstens even hoge score als Julian kan behalen.

3. Laat $m$, $n$ positieve gehele getallen zijn. Bekijk een rijtje positieve gehele getallen $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$ dat voldoet aan $m = a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1$. Voor $1 \leq i \leq m$ definiëren we
$$b_i = \#\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_j \geq i\},$$
dus $b_i$ is het aantal getallen $a_j$ uit het rijtje waarvoor geldt $a_j \geq i$. Voor $1 \leq j \leq n$ definiëren we
$$c_j = \#\{i \in \{1, 2, \ldots, m\} : b_i \geq j\},$$
dus $c_j$ is het aantal getallen $b_i$ waarvoor geldt $b_i \geq j$.
*Voorbeeld: bij het a-rijtje* $5, 3, 3, 2, 1, 1$ *hoort het b-rijtje* $6, 4, 3, 1, 1$.
   (a) Bewijs dat $a_j = c_j$ voor $1 \leq j \leq n$.
   (b) Bewijs dat voor $1 \leq k \leq m$ geldt: $\sum_{i=1}^{k} b_i = k \cdot b_k + \sum_{j=b_k+1}^{n} a_j$.

4. Zij $n$ een geheel getal zo dat $\sqrt{1 + 12n^2}$ een geheel getal is.
Bewijs dat $2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ het kwadraat van een geheel getal is.

5. Laat $\triangle ABC$ een rechthoekige driehoek zijn met $\angle B = 90^\circ$ en $|AB| > |BC|$; en zij $\Gamma$ de halve cirkel met middellijn $AB$ aan de kant van $AB$ waar ook $C$ ligt. Zij punt $P$ op $\Gamma$ zo dat $|BP| = |BC|$ en zij $Q$ op lijnstuk $AB$ zo dat $|AP| = |AQ|$.
Bewijs dat het midden van $CQ$ op $\Gamma$ ligt.