Uitwerkingen toets

Opgave 1. We gebruiken dat $x + \frac{1}{x} \geq 2$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{a}{b}\right)^i + \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{b}{a}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^i + \left(\frac{b}{a}\right)^i \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{a^i}{b^i} + \frac{b^i}{a^i} \right) \\
&\geq \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot 2 \\
&= 2^{m+1}.
\end{aligned}$$

Alternatieve oplossing.
Pas de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde toe op 1 en $\frac{a}{b}$:

$$1 + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}},$$

dus

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^m \geq \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m.$$

Analoog geldt natuurlijk

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m \geq \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m.$$

Nu passen we opnieuw de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde toe:

$$\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m \geq 2\sqrt{\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m \cdot \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m} = 2^{m+1}.$$

Dit bewijst het gevraagde.

Opgave 2. Omdat $\angle PSR$ recht is, is PR een middellijn en is dus ook $\angle PQR$ recht. Verder is $PQHK$ een koordenvierhoek (en $PQRS$ natuurlijk ook), dus

$$\angle QSR = \angle QPR = \angle QPH = \angle QKH.$$

Dus

$$\angle TKS = 90^\circ - \angle QKH = 90^\circ - \angle QSR = \angle QSK.$$

Dus $\triangle TSK$ is gelijkbenig met $|KT| = |TS|$. Verder is $\angle QSR = \angle KQS$, omdat SR en QK beide loodrecht op PS staan, dus

$$\angle KQS = \angle QSR = \angle QKH,$$

zodat ook driehoek KQT gelijkbenig is met $|TQ| = |TK|$. Dus $|TQ| = |TK| = |TS|$.

Opgave 3. Stel niet. Noem de getallen op de kaarten $n_1, \ldots, n_{2007}$ waarbij $n_1 \neq n_2$. Zij

$$s_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i,$$

voor $i = 1, 2, \ldots, 2007$. We weten nu dat $s_i \not\equiv 0 \pmod{2008}$ voor alle i. Stel dat $s_i \equiv s_j \pmod{2008}$ met $i < j$, dan geldt

$$n_{i+1} + \ldots + n_j \equiv 0 \pmod{2008},$$

tegenspraak. Dus $s_1, \ldots, s_{2007}$ nemen modulo 2008 precies de waarden $1, 2, \ldots, 2007$ aan. Bekijk nu n_2. We weten dat $n_2 \not\equiv 0 \pmod{2008}$, dus $n_2 \equiv s_i \pmod{2008}$ voor een of andere i. Voor $i = 1$ staat hier $n_2 \equiv n_1 \pmod{2008}$, wat wegens $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, 2007\}$ impliceert dat $n_1 = n_2$; tegenspraak. En voor $i > 1$ betekent het dat de niet-lege som $s_i - n_2 = n_1 + n_3 + n_4 + \ldots + n_i$ gelijk is aan 0 modulo 2008; wederom tegenspraak.

Opgave 4. Stel dat voor zekere $i \leq n - 1$ geldt dat $a_i > i$. Er geldt $\frac{a_i^2}{a_{i+1}} \leq i + 2$, dus

$$a_{i+1} \geq \frac{a_i^2}{i+2} \geq \frac{(i+1)^2}{i+2} = \frac{i^2 + 2i + 1}{i+2} > i.$$

Als $a_i \geq i + 2$, dan geldt op dezelfde manier $a_{i+1} > i + 1$. Als $a_i = i + 1$, dan is $i + 1$ niet meer beschikbaar als waarde voor a_{i+1}, dus geldt ook $a_{i+1} > i + 1$.
Dus als $a_i > i$, dan ook $a_{i+1} > i + 1$. Aangezien $a_n \leq n$, kan er dus geen enkele i zijn met $a_i > i$. Hieruit volgt dat $a_i = i$ voor alle i.

Opgave 5. We kunnen de vergelijking herschrijven tot $(x + 1)x + (y + 1)y = 4xy$, dus

$$x^2 - (4y - 1)x + (y^2 + y) = 0.$$

Als we dit zien als een vergelijking in x met parameter y, dan geldt er voor de twee oplossingen x_0 en x_1 wegens Vieta dat (i): $x_0 + x_1 = 4y - 1$ en (ii): $x_0 \cdot x_1 = y^2 + y$.
Stel nou dat $x_0 \in \mathbb{N}$ en $y_0 \in \mathbb{N}$ een willekeurige oplossing vormen. Dan is er bij deze waarde van y_0 dus nog een oplossing x_1, die wegens (i) weer geheel is, en wegens (ii) weer positief. Voor deze andere oplossing geldt wegens (i): $x_1 = 4y_0 - 1 - x_0$. Kortom, elk oplossingspaar (x, y) leidt tot een oplossingspaar $(4y - 1 - x, y)$. De truc is nou om te bedenken dat dan ook $(y, 4y - 1 - x)$ een oplossingspaar is.
Het paar $(1, 1)$ is duidelijk een oplossing. Beschouw nu de rij $z_1 = 1$, $z_2 = 1$, en $z_{n+2} = 4z_{n+1} - 1 - z_n$ $(n \geq 1)$, dan is elk paar (z_n, z_{n+1}) dus blijkbaar een oplossing van de gegeven vergelijking.

Tot slot moeten we nog bewijzen dat dit tot echt allemaal verschillende oplossingen (z_n, z_{n+1}) leidt. Hiertoe bewijzen we met inductie dat $\forall n \geq 2 : z_{n+1} \geq 2z_n \wedge z_{n+1} \geq 1$.
Voor $n = 2$ is dit duidelijk, want $z_3 = 2$ en $z_2 = 1$. Stel het geldt voor zekere $n \geq 2$, dus $z_{n+1} \geq 2z_n \wedge z_{n+1} \geq 1$. Dan $z_{n+2} = 4z_{n+1} - 1 - z_n \geq 4z_{n+1} - z_{n+1} - z_{n+1} = 2z_{n+1} \geq 2 > 1$, dus zien we dat het ook geldt voor $n + 1$.