Twee voorbeelden van C-opgaven
voor de tweede ronde (nieuwe stijl)
van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

Bij de C-opgaven telt ook je uitwerking mee en moet je een volledige berekening of redenering geven. Probeer elke uitspraak die je doet zo volledig mogelijk te beargumenteren. Laat bij elke berekening al je tussenstappen zien.

Hieronder tref je twee voorbeelden van C-opgaven aan. Het is een goede oefening om ze te proberen op te lossen zonder naar de oplossingen te kijken. Als je er uit komt, probeer dan ook voor jezelf je oplossing nog zo duidelijk en gedetailleerd mogelijk op te schrijven. Meestal lukt dat wel op een of twee A4'tjes. Maar als je aan een paar regels genoeg denkt te hebben, moet je goed bij je zelf nagaan of je echt al je beweringen wel voldoende hebt onderbouwd.

Vergelijk ten slotte je eigen nette uitwerking met onze voorbeelduitwerkingen op de volgende bladzijden. Wellicht heb je een andere route gekozen naar de oplossing. Maar hopelijk krijg je hierdoor wel een goed beeld van wat er bij een C-opgave van je wordt verwacht.

Als je geen volledige oplossing hebt gevonden, kun je bij de wedstrijd in maart ook punten krijgen voor stukjes van een oplossing. Lever daarom altijd ook je kladblaadjes in en probeer ook daar zo goed mogelijk je observaties te beargumenteren en je berekeningen volledig op te schrijven. Ook als je een netversie hebt, is het slim om toch je kladblaadjes ook in te leveren. Wellicht ben je iets vergeten op te schrijven in je netversie, wat nog wel in je kladversie staat, en kun je voor klad en net samen de volle punten scoren.

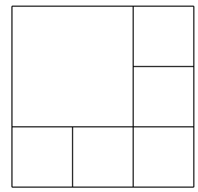
Voorbeeldopgave C1.
Gegeven is een vierkant. Laat zien dat het voor alle gehele getallen $n \geq 6$ mogelijk is om het vierkant op te delen in n kleinere vierkantjes. (Bij zo'n opdeling hoeven deze n kleinere vierkantjes niet allemaal dezelfde grootte te hebben.)

Voorbeeldopgave C2.
Bepaal alle positieve gehele getallen m waarvoor geldt dat zowel $m - 110$ als $m + 110$ het kwadraat van een geheel getal is.

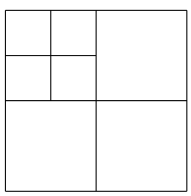
Voorbeeldopgave C1.
Gegeven is een vierkant. Laat zien dat het voor alle gehele getallen $n \geq 6$ mogelijk is om het vierkant op te delen in n kleinere vierkantjes. (Bij zo'n opdeling hoeven deze n kleinere vierkantjes niet allemaal dezelfde grootte te hebben.)

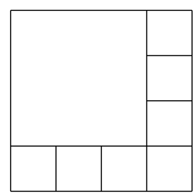
Oplossing.
We maken eerst opdelingen van het gegeven vierkant in 6, 7 en 8 kleinere vierkantjes en laten daarna zien dat het voor grotere n ook lukt.

Door het gegeven vierkant eerst op te delen in 3×3 even grote vierkantjes en vervolgens hiervan 2×2 vierkantjes weer samen te nemen, vinden we de volgende opdeling in 6 kleinere (niet even grote) vierkantjes:



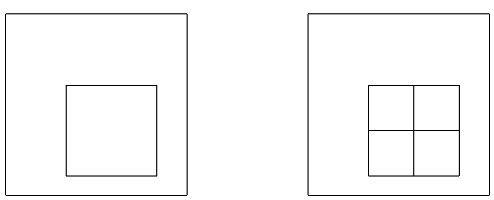
Door het gegeven vierkant eerst juist op te delen in 4×4 even grote vierkantjes en vervolgens ook weer 2×2 of 3×3 vierkantjes samen te nemen, vinden we bovendien de volgende opdelingen in 7 en in 8 kleinere vierkantjes:





Nu moeten we nog laten zien dat het ook lukt om het gegeven vierkant op te delen in 9 vierkantjes, in 10 vierkantjes, in 11 vierkantjes, et cetera.

Stel dat we het gegeven vierkant opgedeeld hebben in n vierkantjes. Dan kunnen we één van die n vierkantjes in vier nog kleinere vierkantjes opdelen door hem zowel horizontaal als verticaal doormidden te snijden (zie onderstaand figuur). De nieuwe opdeling van het gegeven vierkant bestaat dan uit deze 4 nieuwe vierkantjes en de resterende $n-1$ vierkantjes van de oude opdeling, dus uit $4 + (n-1) = n + 3$ vierkantjes.



Uit de opdeling van het gegeven vierkant in 6 kleinere vierkantjes halen we op deze manier een opdeling in 9 vierkantjes. En uit de opdeling in 7 (resp. in 8) vierkantjes krijgen we opdelingen in 10 (resp. in 11) vierkantjes. Met deze opdelingen van het gegeven vierkant in 9, 10 en 11 kleinere vierkantjes, kunnen we op zijn beurt nu ook gemakkelijk opdelingen maken in 12, 13 en 14 vierkantjes, en ook in 15, 16 en 17 vierkantjes, enzovoorts. Zo kunnen we voor alle $n \geq 6$ het gegeven vierkant opdelen in n kleinere vierkantjes.

Voorbeeldopgave C2.
Bepaal alle positieve gehele getallen m waarvoor geldt dat zowel $m-110$ als $m+110$ het kwadraat van een geheel getal is.

Oplossing.
Neem zo'n m en laat a en b gehele getallen zijn zodat $m-110=a^2$ en $m+110=b^2$. Door eventueel a te vervangen door $-a$ of b door $-b$, zien we in dat we wel mogen aannemen dat $a \geq 0$ en $b \geq 0$. Omdat $b^2=m+110$ groter is dan $a^2=m-110$, geldt dan $b>a$. Dus $b-a>0$. Bovendien is $b>0$, dus $b+a>0$.

We kijken nu naar het verschil van deze twee kwadraten: $b^2-a^2=(m+110)-(m-110)=220$. Door de linkerkant hiervan in factoren te ontbinden, vinden we de volgende vergelijking:

$$(b-a)(b+a)=220. \tag{1}$$

Met deze vergelijking gaan we verder werken. De rechterkant is even, dus de linkerkant moet ook even zijn. Dus $b-a$ of $b+a$ is even. Maar stel dat $b-a$ even is, dan is $b+a=(b-a)+2a$ ook even. En andersom, als $b+a$ even is, dan is $b-a=(b+a)-2a$ ook even. Dus ze zijn allebei even. We kunnen dus schrijven: $b-a=2c$, $b+a=2d$ voor gehele getallen $c>0$ en $d>0$. Nu verandert onze vergelijking in $2c\cdot 2d=220$ oftewel $c\cdot d=55$.

Om 55 als een product van twee positieve gehele getallen te schrijven, bekijken we de positieve gehele getallen waar 55 deelbaar door is. Dit zijn alleen 1, 5, 11 en 55. Dus we kunnen 55 op twee manieren schrijven als het product van twee positieve gehele getallen schrijven: $55=1\cdot 55$ en $55=5\cdot 11$. Er geldt $b+a\geq b-a$, dus $d\geq c$, dus het kleinste getal hoort altijd bij c en het grootste getal bij d. We krijgen dus twee mogelijkheden.

Het eerste geval: $c=1$ en $d=55$. Nu geldt $b-a=2c=2$ en $b+a=2d=110$. Hieruit volgt $2b=(b-a)+(b+a)=112$, dus $b=56$. We berekenen $m=b^2-110=3026$.

Het tweede geval: $c=5$ en $d=11$. Nu geldt $b-a=2c=10$ en $b+a=2d=22$. Hieruit volgt $2b=(b-a)+(b+a)=32$, dus $b=16$. We berekenen $m=b^2-110=146$.

We hebben nu laten zien dat de enige twee mogelijkheden voor m zijn: $m=3026$ en $m=146$. We controleren ten slotte nog of deze allebei echt voldoen, dus of $m-110$ en $m+110$ beide kwadraten zijn in allebei de gevallen. Er geldt

$$3026-110=2916=54^2, \quad 3026+110=3136=56^2,$$

$$146-110=36=6^2, \quad 146+110=256=16^2.$$

Dus beide mogelijkheden voldoen. De gevraagde getallen m zijn dus $m=3026$ en $m=146$.

Opmerking: Het is als uitwerking niet voldoende om alleen de twee antwoorden, $m=3026$ en $m=146$, te geven. Je moet een volledige redenering geven waaruit blijkt dat dit de enige twee oplossingen zijn en er dus geen andere antwoorden kunnen zijn.