# Tweede ronde
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 13 maart 2015

- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

## B-opgaven

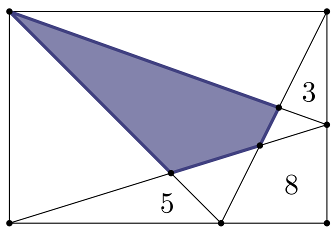
Bij de B-vragen moet je een of meerdere getallen als antwoord geven. Voor een goed antwoord krijg je 4 punten en voor een fout of onvolledig antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is.
LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of $2+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of $\frac{1}{4}\pi+1$.

**B1.** We bekijken getallen van twee of meer cijfers waarvan geen van de cijfers een 0 is. We noemen zo'n getal *dertienig* als elke twee cijfers die naast elkaar staan een veelvoud van 13 vormen. Zo is 139 dertienig, want $13 = 1 \times 13$ en $39 = 3 \times 13$.
Hoeveel dertienige getallen van vijf cijfers zijn er?

**B2.** Van een vierhoek $ABCD$ zijn de hoeken bij $A$ en $B$ recht. Verder geldt dat $|AB| = 5$ en $|AD| = |CD| = 6$.
Bepaal alle mogelijke waarden van $|BC|$.

**B3.** Berry heeft 756 frambozen geplukt. Hij verdeelt de frambozen onder zichzelf en zijn vrienden zó dat iedereen er precies evenveel krijgt. Drie van zijn vrienden hebben echter niet zoveel trek en geven elk een aantal frambozen terug, namelijk precies een kwart van hun eigen portie. Berry heeft juist veel trek en eet daarom niet alleen zijn eigen portie op, maar ook de frambozen die hij terugkrijgt. Hij raakt op een gegeven moment de tel kwijt, maar weet nog wel zeker dat hij meer dan 150 frambozen gegeten heeft.
Hoeveel frambozen heeft Berry precies gegeten?

**B4.** Een rechthoek is door vier lijnstukken verdeeld in acht stukken zoals aangegeven in de figuur. Van drie stukken zijn de oppervlaktes aangegeven, namelijk 3, 5 en 8.




Wat is de oppervlakte van de gekleurde vierhoek?

GA VERDER OP DE ACHTERKANT

**B5.** In een $5 \times 5$-tabel plaatsen we de getallen 1 tot en met 5 zó dat in elke rij en elke kolom elk getal eenmaal voorkomt. Een getal in een bepaalde rij en kolom van de tabel is *goed geplaatst* als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:

- In die rij staan alle kleinere getallen links van het getal en alle grotere getallen rechts ervan, of andersom.
- In die kolom staan alle kleinere getallen onder het getal en alle grotere getallen erboven, of andersom.

Wat is het maximale aantal goed geplaatste getallen in zo'n tabel?

## C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

**C1.** We noemen een aantal verschillende getallen *mooi verspreid* als na sortering van klein naar groot opeenvolgende getallen steeds hetzelfde verschil hebben. De getallen 3, 11 en 7 zijn bijvoorbeeld mooi verspreid, want als je ze van klein naar groot sorteert is het verschil steeds 4.

a) Kees begint met drie verschillende getallen. Hij telt elk tweetal daarvan bij elkaar op en krijgt zo drie uitkomsten. Volgens Jan kunnen deze drie uitkomsten alleen mooi verspreid zijn als de getallen waarmee Kees begint mooi verspreid zijn.
Heeft Jan gelijk? Zo ja, bewijs dit; zo nee, toon dan met een voorbeeld aan dat Jan ongelijk heeft.

b) Jan begint met vier verschillende getallen. Ook hij telt elk tweetal daarvan bij elkaar op en krijgt dan zes uitkomsten. Hij wil met een viertal beginnen zó dat zijn zes uitkomsten mooi verspreid zijn.
Kan hij dit voor elkaar krijgen? Zo ja, geef een voorbeeld; zo nee, bewijs dat het niet kan.

**C2.** We bekijken rechthoekige borden die bestaan uit $m \times n$ vakjes die gerangschikt zijn in $m$ (horizontale) rijen en $n$ (verticale) kolommen. We willen elk vakje van zo'n bord zwart of wit kleuren op zo'n manier dat aan de volgende drie eisen is voldaan:

- In elke rij zitten precies evenveel zwarte als witte vakjes.
- Als een rij en een kolom elkaar kruisen in een *zwart* vakje, dan bevatten die rij en die kolom precies evenveel zwarte vakjes.
- Als een rij en een kolom elkaar kruisen in een *wit* vakje, dan bevatten die rij en die kolom precies evenveel witte vakjes.

Bepaal alle paren $(m, n)$ waarvoor zo'n kleuring van het bord mogelijk is.