# Tweede ronde
# Nederlandse Wiskunde Olympiade

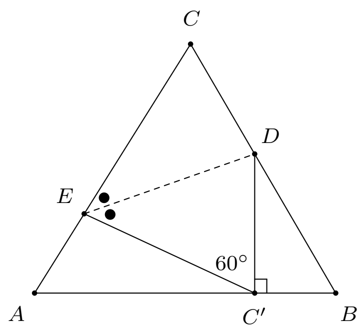
vrijdag 14 maart 2014

## Uitwerkingen

## B-opgaven

**B1.** 169 Brenda kan 25 verschillend gevulde zakjes maken zonder blauwe knikkers, want ze kan 1 tot en met 25 rode knikkers in een zakje stoppen. Er zijn 23 verschillende zakjes mogelijk met 1 blauwe knikker, want er kunnen 2 tot en met 24 rode knikkers worden toegevoegd. Met 2 blauwe knikkers zijn er 21 mogelijkheden, namelijk met 3 tot en met 23 rode knikkers. In totaal zijn er $25 + 23 + \ldots + 1 = 169$ verschillend gevulde zakjes die Brenda kan maken.

**B2.** $45°$ Als eerste merken we op dat driehoeken $CDE$ en $C'DE$ elkaars spiegelbeeld zijn en dus gelijke hoeken hebben. In het bijzonder geldt dat $\angle DC'E = \angle DCE = 60°$. Ook volgt dat $\angle CED = \angle DEC'$, zie de figuur.




Uit $\angle AC'B = 180°$ volgt nu dat $\angle AC'E = 180° - 90° - 60° = 30°$. De som van de hoeken in driehoek $AC'E$ is $180°$ en dus vinden we $\angle AEC' = 180° - 60° - 30° = 90°$. Uit $\angle AEC = 180°$ volgt nu dat $\angle CEC' = 180° - 90° = 90°$.
We concluderen dat $\angle DEC' = \frac{1}{2}\angle CEC' = 45°$.

**B3.** 13 Als $8n + 1$ het kwadraat is van een geheel getal, dan moet dat getal oneven zijn. Omgekeerd is het kwadraat van een oneven getal altijd een achtvoud plus 1. Immers, stel dat $k$ oneven is, dan kunnen we schrijven $k = 2\ell + 1$ voor een geheel getal $\ell$. We zien dat

$$k^2 = (2\ell + 1)^2 = 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4\ell(\ell + 1) + 1.$$

Omdat ofwel $\ell$ ofwel $\ell + 1$ even is, zien we dat $4\ell(\ell + 1)$ deelbaar is door 8, zodat $k^2$ een achtvoud plus 1 is.

We hoeven dus alleen te bepalen hoeveel oneven kwadraten $x$ er zijn met $8 \cdot 1 + 1 \leqslant x \leqslant 8 \cdot 100 + 1$. Dit zijn de kwadraten $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ tot en met $27^2 = 729$, want $29^2 = 841$ is groter dan 801. Het aantal kwadraten van de gevraagde vorm is dus 13.

**B4.** 5 Het getal dat Emile in gedachten had noemen we $c_{10}$, het getal van zijn rechter buurman noemen we $c_9$, en zo verder tot en met de linker buurman van Emile, die het getal $c_1$ in gedachten had. We zien dan dat

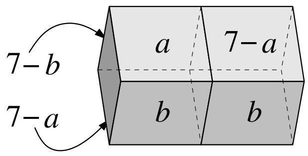
$$\begin{aligned} c_{10} + c_8 &= 2 \cdot 9 = 18, \\ c_8 + c_6 &= 2 \cdot 7 = 14, \\ c_6 + c_4 &= 2 \cdot 5 = 10, \\ c_4 + c_2 &= 2 \cdot 3 = 6, \\ c_2 + c_{10} &= 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

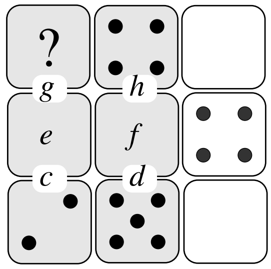
Optellen geeft $2(c_2 + c_4 + c_6 + c_8 + c_{10}) = 50$, dus $c_2 + c_4 + c_6 + c_8 + c_{10} = 25$.
Er volgt dat $c_{10} = (c_2 + c_4 + c_6 + c_8 + c_{10}) - (c_2 + c_4) - (c_6 + c_8) = 25 - 6 - 14 = 5$.

**B5.** 3 De ogenaantallen op tegenoverliggende zijden van een dobbelsteen noemen we *tegengesteld*. Samen zijn deze aantallen altijd 7. We bekijken twee dobbelstenen die met gelijke ogenaantallen tegen elkaar zitten, maar nog wel ten opzichte van elkaar kunnen draaien. Rondom zien we bij de twee dobbelstenen dan dezelfde ogenaantallen, maar in tegengestelde cyclische volgorde.

Bekijk de situatie waarbij de ogenaantallen aan de bovenkant van de twee dobbelstenen tegengesteld zijn, zeg $a$ en $7-a$. Deze situatie is uitgebeeld in de linker figuur. De linker dobbelsteen heeft dan rondom ogenaantallen $a$, $b$, $7-a$ en $7-b$ voor zekere $b$. De rechter dobbelsteen heeft dus rondom de ogenaantallen in tegengestelde cyclische volgorde: $7-a$, $b$, $a$ en $7-b$. We zien dat de dobbelstenen aan de voorkant en achterkant gelijke ogenaantallen moeten hebben, namelijk $b$ respectievelijk $7-b$.

Omgekeerd geldt dat als de twee dobbelstenen aan de voorkant (of achterkant) dezelfde ogenaantallen hebben, de ogenaantallen aan de bovenkant tegengesteld moeten zijn.




We passen dit toe op de zes dobbelstenen in de eerste twee kolommen van de $3 \times 3$ tabel, zie de rechter figuur. De twee dobbelstenen in de derde rij tonen aan de bovenkant tegengestelde ogenaantallen, namelijk 2 en 5. De ogenaantallen $c$ en $d$ waarmee ze aan de twee dobbelstenen in rij 2 grenzen moeten dus gelijk zijn. Hieruit volgt dat de ogenaantallen $e$ en $f$ aan de bovenkant juist weer tegengesteld zijn. De ogenaantallen $g$ en $h$ zijn daarom weer gelijk. Tenslotte moeten de ogenaantallen die zichtbaar zijn aan de bovenkant van de twee dobbelstenen in rij 1 dan weer tegengesteld zijn. We concluderen dat op de plek van het vraagteken een 3 moet staan.

## C-opgaven

**C1.** (a) Ten eerste merken we op dat $a+d$ de oppervlakte is van driehoek $AEF$ en dat $p+q$ de oppervlakte is van driehoek $BEF$. De basis $AE$ van driehoek $AEF$ is even lang als de basis $BE$ van driehoek $BEF$. Omdat ze dezelfde hoogte hebben, volgt dat de twee driehoeken dezelfde oppervlakte hebben.

(b) Hier gebruiken we dat driehoeken $DEF$ en $CEF$ gelijke basis hebben ($|DF| = |CF|$) en gelijke corresponderende hoogtes. Hun oppervlaktes zijn dus gelijk, oftewel $c+d = q+r$. Als we de vergelijking van deel (a) hier vanaf trekken vinden we $c-a = r-p$, oftewel $a+r = c+p$, zoals gevraagd.

(c) De hoogte van driehoeken $AED$, $BEC$ en $ABF$ gezien vanaf de bases $AE$, $BE$ en $AB$ noemen we $x$, $y$ en $z$. Omdat $F$ het midden is van $CD$ vinden we dat de hoogte $z$ het gemiddelde moet zijn van de hoogtes $x$ en $y$, oftewel $\frac{x+y}{2} = z$. De oppervlakte van driehoek $AED$ is $\frac{1}{2} \cdot x \cdot |AE|$, de oppervlakte van driehoek $BEC$ is $\frac{1}{2} \cdot y \cdot |BE|$ en de oppervlakte van driehoek $ABF$ is $\frac{1}{2} \cdot z \cdot |AB|$. Omdat $E$ het midden is van $AB$ hebben we $|AE| = |BE|$ en $|AB| = 2 \cdot |AE|$. De som van de oppervlaktes van driehoeken $AED$ en $BEC$ is nu $\frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot |AE| = z \cdot |AE|$, terwijl de oppervlakte van driehoek $ABF$ gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot z \cdot 2|AE| = z \cdot |AE|$. De oppervlaktes zijn dus gelijk en we vinden $a+b+p+s = a+d+p+q$. Door aan beide kanten van de vergelijking $a+p$ af te trekken vinden we $b+s = d+q$, zoals gevraagd.

**C2.** (a) Beschouw het tiencijferige getal 1001001001. Als we dit met 111 vermenigvuldigen krijgen we het getal 111111111111 dat uit alleen maar enen bestaat. Het getal 1001001001 is dus een jackpotgetal.

(b) Laat $k$ een getal zijn van minstens twee cijfers, waarvan alle cijfers gelijk zijn, zeg gelijk aan $a$. Merk op dat $a \neq 0$. We moeten bewijzen dat de cijfers van

$$11k \;=\; k + 10k \;=\; a \cdots a \;+\; a \cdots a0$$

niet allemaal gelijk zijn.

Het laatste cijfer van $11k$ is $a$. We laten zien dat het een-na-laatste cijfer van $11k$ ongelijk is aan $a$. Er zijn twee gevallen. Als $a \leqslant 4$, dan is het een-na-laatste cijfer van $11k$ gelijk aan $a + a$. Dit is ongelijk aan $a$ omdat $a \neq 0$. Als $a \geqslant 5$, dan is het een-na-laatste cijfer van $11k$ gelijk aan $a + a - 10$. Dit is ongelijk aan $a$ omdat $a \neq 10$. We concluderen dat 11 geen jackpotgetal is.

(c) Het getal 143 is een jackpotgetal. Dit volgt direct uit het feit dat $143 \cdot 777 = 111111$.