

Tweede ronde

Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 14 maart 2014

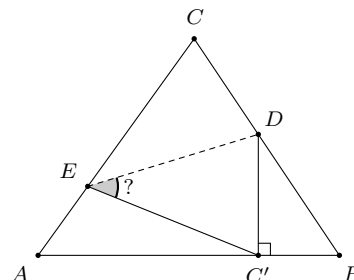
- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Veel succes!

B-opgaven

Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$ of 5^8 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5} + \pi)$.

B1. Brenda vult knikkerzakjes vanuit een onuitputtelijke voorraad rode en blauwe knikkers. In elk zakje stopt ze meer rode dan blauwe knikkers en in elk zakje komen niet meer dan 25 knikkers. Zo kan ze bijvoorbeeld een zakje maken met 6 rode en 2 blauwe knikkers of een zakje met 1 rode knikker en 0 blauwe knikkers. Hoeveel verschillend gevulde zakjes kan ze in totaal maken?

B2. In de figuur zie je een gelijkzijdige driehoek ABC en punten D en E op zijden BC en AC . Als je de driehoek langs de lijn DE dubbel vouwt, dan komt hoekpunt C precies op lijn AB terecht, namelijk op het punt C' . Er geldt dat $\angle DC'B = 90^\circ$. Hoe groot is $\angle DEC'$?
Let op: het plaatje is niet op schaal getekend.

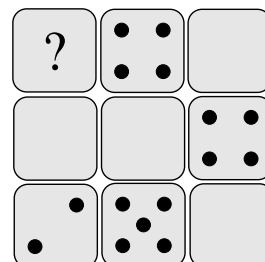


B3. Voor hoeveel van de gehele getallen n van 1 tot en met 100 is $8n + 1$ het kwadraat van een geheel getal?

B4. Emile staat samen met negen andere mensen in een kring. Elk van de tien personen neemt een geheel getal (dat ook negatief mag zijn) in gedachten en fluistert dit getal aan allebei zijn burens. Vervolgens noemt iedereen hardop het gemiddelde van de twee getallen die hij van zijn burens heeft gehoord. Het blijkt dat Emile het getal 10 noemt, zijn rechter buurman noemt het getal 9, diens rechter buurman noemt het getal 8 en zo door langs de kring tot en met de linker buurman van Emile, die het getal 1 noemt. Welk getal had Emile in gedachten?

B5. De som van het aantal ogen op overstaande zijvlakken van een dobbelsteen is altijd 7. Negen identieke dobbelstenen worden in een vierkant van 3×3 aan elkaar geplakt. Dat gebeurt op zo'n manier dat twee tegen elkaar geplakte zijvlakken altijd hetzelfde aantal ogen hebben. In de figuur zie je het bovenaanzicht van het resultaat, waarbij van vijf dobbelstenen het ogenaantal niet is weergegeven.

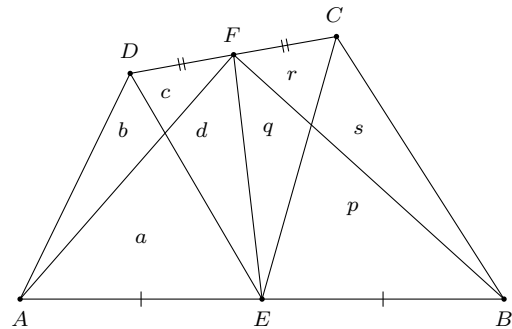
Welk aantal ogen moet op de plaats van het vraagteken staan?



C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

- C1.** Gegeven is een vierhoek $ABCD$. Punt E is het midden van zijde AB en punt F is het midden van zijde CD . De vierhoek $ABCD$ wordt door AF , BF , CE , DE en EF in acht driehoeken verdeeld. De oppervlakten van deze driehoeken zijn aangegeven met de letters a tot en met d en p tot en met s , zoals in de figuur.



- Bewijs dat $a + d = p + q$.
- Bewijs dat $a + r = c + p$.
- Bewijs dat $b + s = d + q$.

- C2.** We noemen een positief geheel getal n een *jackpotgetal* als het de volgende eigenschap heeft: er bestaat een positief geheel getal k met minstens twee cijfers waarvan alle cijfers hetzelfde zijn (zoals 11111 of 888) en waarvoor $n \cdot k$ weer een getal is waarvan alle cijfers hetzelfde zijn. Zo is 3 een jackpotgetal, want $3 \cdot 222 = 666$.

- Bepaal een jackpotgetal van 10 cijfers en laat zien dat het inderdaad een jackpotgetal is.
- Laat zien dat 11 geen jackpotgetal is.
- Bepaal of 143 een jackpotgetal is en onderbouw je antwoord met een bewijs.