Tweede ronde
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 15 maart 2013

Uitwerkingen

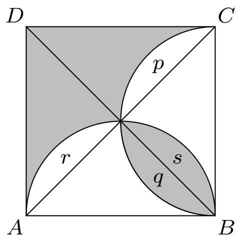
B-opgaven

B1. 13 Er is een oplossing met dertien scholieren, want als vijf scholieren 100 punten scoorden en de overgebleven acht scholieren scoorden 61 punten, dan was de gemiddelde score inderdaad $\frac{5\cdot100+8\cdot61}{13} = \frac{988}{13} = 76$ punten.
Het kan niet zijn dat er twaalf of minder scholieren meededen. Stel namelijk dat er $n \leqslant 12$ scholieren waren. Vijf van hen scoorden 100 punten en de overige $n-5$ minstens 60. Hun totale score is dan minstens $500 + (n-5)\cdot 60 = 60n + 200$. Hun gemiddelde score is dan minstens

$$\frac{60n+200}{n} = 60 + \frac{200}{n} \geqslant 60 + \frac{200}{12} = 76\tfrac{2}{3},$$

want $n \leqslant 12$. Maar dit in tegenspraak met het feit dat het gemiddelde 76 was.

B2. 8 Merk op dat de twee cirkels allebei door het midden van het vierkant gaan. De vier cirkelsegmenten aangegeven met p, q, r en s horen dus alle vier bij een kwart van een cirkel met straal 2 en hebben dus alle vier dezelfde oppervlakte. De totale oppervlakte van het grijze gebied is daarom gelijk aan de oppervlakte van driehoek ACD en daarmee gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$.



B3. 5 uur Per 12 uur loopt de urenwijzer van de eerste klok $\frac{1}{100}$ rondje uit ten opzichte van de juiste tijd, en die van de tweede klok zelfs $\frac{5}{100}$ rondje. Per 12 uur loopt de tweede klok dus $\frac{5-1}{100} = \frac{1}{25}$ rondje uit op de eerste klok. Het duurt dus $25\cdot 12$ uur voordat de urenwijzer van de tweede klok precies een rondje meer heeft gemaakt dan die van de eerste klok. Op dat moment geven de klokken voor het eerst weer dezelfde tijd aan.

Na deze $25\cdot 12$ uur is de urenwijzer van de eerste klok $\frac{101}{100}\cdot 25 = 25\frac{1}{4}$ rondje gedraaid. De eerste klok (en dus ook de tweede klok) geeft dan een tijd aan van $2+3=5$ uur.

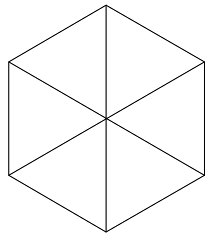
B4. $\frac{1}{4}$ Het product van de acht getallen in de tweede en vierde rij is gelijk aan het product van de acht getallen in de eerste en tweede kolom. Dat wil zeggen dat

$$C\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot F\cdot G\cdot H\cdot 16 = \tfrac{1}{2}\cdot C\cdot 4\cdot F\cdot 32\cdot 2\cdot 1\cdot G.$$

$\frac{1}{2}$	32	8	1
4	2	8	2
4	1	8	4
16	2	$\frac{1}{4}$	16

Omdat C, F en G niet nul zijn, mogen we aan beide kanten delen door C, F en G. We vinden dan $512\cdot H = 128$, en dus $H = \frac{1}{4}$. Hiernaast staat een mogelijke oplossing met $H = \frac{1}{4}$.

B5. 19 Door de regelmatige zeshoek in zes kleine gelijkzijdige driehoeken te verdelen, zien we dat de lengte van de lange diagonaal AC tweemaal de zijdelengte van de zeshoek is. We berekenen driemaal de zijdelengte, namelijk $|AB| + |BC| + |CD|$. Lijnstuk AB is de zijde van een parallellogram, waarvan de daaraan evenwijdige zijde lengte $11 + 16 = 27$ heeft. Er geldt dus dat $|AB| = 27$.

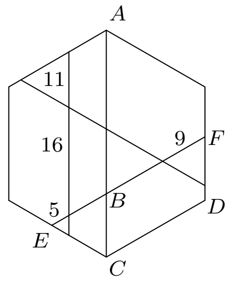


Omdat driehoek BCE gelijkzijdig is, volgt dat $|BC| = |EB|$.

Omdat $BCDF$ een parallellogram is, volgt dat $|CD| = |BF|$.

Ten slotte lezen we af dat $|EB| + |BF| = |EF| = 5 + 16 + 9 = 30$.

Alles tezamen vinden we dat driemaal de zijdelengte gelijk is aan



$$|AB| + |BC| + |CD| = 27 + |EB| + |BF| = 27 + 30 = 57.$$

De zijdelengte is dus $\frac{57}{3} = 19$.

C-opgaven

C1. (a) Het getal 4132 begint met een 4 en is bovengemiddeld, omdat $2 \cdot 3 \geqslant 4 + 1$ en $2 \cdot 2 \geqslant 1 + 3$.

(b) Stel dat $a4bc$ een viercijferig bovengemiddeld getal zou zijn, met a, b en c de cijfers 1, 2 en 3 zijn (niet noodzakelijk in die volgorde). Er moet gelden dat $2 \cdot b \geqslant a + 4 \geqslant 5$. Dus $b \geqslant 3$. Op dezelfde manier vinden we $2 \cdot c \geqslant 4 + b \geqslant 7$, dus $c \geqslant 4$. Maar c was hoogstens 3, dus dat kan niet.

(c) Merk op dat 1243756, 1234576 en 1234567 bovengemiddelde getallen zijn waarbij de 7 op de vijfde, zesde en zevende positie staat.
Het cijfer 7 kan niet op de eerste positie staan. Stel namelijk dat $7abcdef$ bovengemiddeld zou zijn. Dan zou gelden dat $2 \cdot b \geqslant 7 + a \geqslant 8$ en dus $b \geqslant 4$. Vervolgens geldt $2 \cdot c \geqslant a + b \geqslant 5$, dus $c \geqslant 3$. Nu zien we achtereenvolgens dat $d, e, f \geqslant 4$. De enige plek voor zowel het cijfer 1 als het cijfer 2 is dan a en dat kan niet.
Het cijfer 7 kan niet op de tweede of derde positie staan. Immers, dan moet het cijfer direct na de 7 minstens 4 zijn, en daarmee ook alle cijfers erna. De cijfers 1, 2 en 3 moeten dus alledrie voor de 7 staan, terwijl er hooguit twee posities beschikbaar zijn.
Het cijfer 7 kan niet op de vierde positie staan. Immers, de 1 kan niet op de derde positie staan, want $2 \cdot 1 < 2 + 3$. Omdat het cijfer voor de 7 minstens 2 is, moet het cijfer na de 7 minstens 5 zijn. Het cijfer daarna moet dan minstens 6 zijn, evenals het cijfer daarna. De vier cijfers 1, 2, 3 en 4 kunnen dus enkel op de drie posities voor de 7 staan, hetgeen onmogelijk is.

C2. (a) Omdat $x \geqslant 5$ een oneven getal is, kunnen we schrijven $x = 2n + 1$ voor een geheel getal $n \geqslant 2$. Nu zijn $(x, y, z) = (2n + 1, n, n + 2)$ en $(x, y, z) = (2n + 1, n + 1, n - 1)$ twee verschillende goede drietallen. Het is duidelijk dat in beide gevallen geldt dat y en z inderdaad positieve gehele getallen zijn en dat $y \geqslant 2$. Dat het inderdaad oplossingen zijn van de gegeven vergelijking volgt uit

$$(2n+1)^2 - 3n^2 = n^2 + 4n + 1 = (n+2)^2 - 3 \quad \text{en}$$
$$(2n+1)^2 - 3(n+1)^2 = n^2 - 2n - 2 = (n-1)^2 - 3.$$

Hiermee is de opgave opgelost.

Opmerking. *Om op het idee te komen voor deze drietallen, zou je bijvoorbeeld de volgende aanpak kunnen volgen. Vul eerst $x = 5$ in. Dan zie je dat z niet groter dan 5 kan zijn. Als z gelijk is aan 5, is $y = 1$ en dat mag ook niet, dus z moet zelfs kleiner dan 5 zijn. Je kunt nu de waarden 1 tot en met 4 voor z proberen en de bijbehorende y uitrekenen, als die bestaat. Zo vind je twee goede drietallen bij $x = 5$. Door hetzelfde te doen voor $x = 7$*

en $x = 9$ vind je ook bij deze waarden goede drietallen. In deze drietallen zit een duidelijk patroon: als x met 2 toeneemt, dan neem y met 1 toe en z ook met 1. (Dit geldt voor beide series drietallen.) Met behulp hiervan kun je een algemene uitdrukking voor y en z gokken als $x = 2n + 1$. Zo'n goed drietal vervolgens controleren door hem in te vullen, is dan voldoende voor de oplossing.

(b) Het drietal $(16, 9, 4)$ voldoet hier bijvoorbeeld aan, omdat $16^2 - 3 \cdot 9^2 = 13 = 4^2 - 3$.

Opmerking. *Het geven van een geschikt drietal, en laten zien dat die voldoet, is al een volledige oplossing. Om op zo'n drietal te komen zou je bijvoorbeeld de volgende aanpak kunnen volgen. We kunnen de vergelijking herschrijven naar $x^2 - z^2 = 3y^3 - 3$. Dit kunnen we ontbinden aan beide kanten: $(x-z)(x+z) = 3(y-1)(y+1)$. Met behulp van deze nieuwe schrijfwijze kunnen we gemakkelijker op zoek naar drietallen die voldoen, door steeds een getal voor y te proberen. Probeer bijvoorbeeld $y = 4$. Dan staat er aan de rechterkant $3 \cdot 3 \cdot 5$, dus wordt de linkerkant $5 \cdot 9$ of $3 \cdot 15$ of $1 \cdot 45$. Voor x krijgen we nu steeds het gemiddelde van de twee factoren, dus bij deze drie mogelijkheden wordt dat $x = 7$, $x = 9$ en $x = 23$, allemaal niet even. Na nog wat verder proberen op dezelfde manier blijken $y = 7$ en $y = 9$ wel een even waarde voor x te geven.*