Finale
Nederlandse Wiskunde Olympiade

vrijdag 12 september 2014

Uitwerkingen

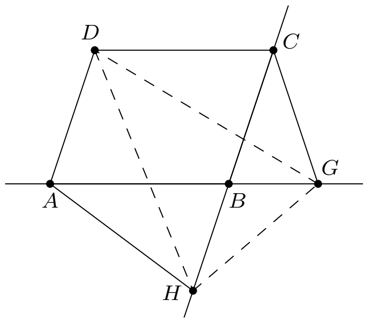
1. Stel dat (a, b, c) een oplossing is. Uit $a \leqslant b \leqslant c$ volgt dat $abc = 2(a+b+c) \leqslant 6c$. Delen door c geeft $ab \leqslant 6$. We zien dat $a = 1$ of $a = 2$, want uit $a \geqslant 3$ zou volgen dat $ab \geqslant a^2 \geqslant 9$.

We bekijken eerst het geval $a = 2$.
Uit $ab \leqslant 6$ volgt dat $b = 2$ of $b = 3$. In het eerste geval volgt uit het gegeven $abc = 2(a+b+c)$ dat $4c = 8 + 2c$ en dus $c = 4$. Het is makkelijk na te gaan dat het gevonden drietal $(2, 2, 4)$ inderdaad een oplossing is. In het tweede geval geldt $6c = 10 + 2c$, dus $c = \frac{5}{2}$. Omdat c geheel moet zijn, geeft dit geen oplossing.

We bekijken nu het geval $a = 1$.
We weten nu dat $bc = 2(1 + b + c)$. Herschrijven geeft $(b-2)(c-2) = 6$. Merk op dat $b - 2$ niet negatief kan zijn (en dus $c - 2$ ook niet). Dan zou immers moeten gelden dat $b = 1$, zodat uit $(1-2)(c-2) = 6$ zou volgen dat $c = -4$. Maar c moet positief zijn.
Er zijn maar twee manieren om 6 te schrijven als product van twee niet-negatieve gehele getallen, namelijk $6 = 1 \times 6$ en $6 = 2 \times 3$. Dit geeft twee mogelijkheden: $b - 2 = 1$ en $c - 2 = 6$, of $b - 2 = 2$ en $c - 2 = 3$. Het is makkelijk na te gaan dat de twee bijbehorende drietallen $(1, 3, 8)$ en $(1, 4, 5)$ inderdaad oplossingen zijn.

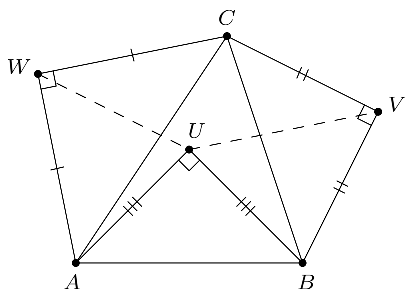
De enige oplossingen zijn dus $(2, 2, 4)$, $(1, 3, 8)$ en $(1, 4, 5)$. $\square$

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager



We weten dat $\angle ABH = \angle CBG$, omdat dit overstaande hoeken zijn. Omdat driehoeken ABH en CBG gelijkbenig zijn, geldt $\angle AHB = \angle ABH$ en $\angle CBG = \angle CGB$. Driehoeken ABH en CBG zijn nu gelijkvormig (hh) en er geldt dus $\angle BAH = \angle BCG$. Omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt $\angle DAB = \angle DCB$ en dus geldt $\angle DAH = \angle DAB + \angle BAH = \angle DCB + \angle BCG = \angle DCG$. Omdat $ABCD$ een parallellogram is, geldt $|CD| = |AB| = |AH|$ en $|AD| = |BC| = |CG|$. Driehoeken DAH en GCD zijn daarom congruent (ZHZ) en er geldt dus $|DH| = |DG|$. Met andere woorden, driehoek DGH is gelijkbenig. $\square$

2. Versie voor klas 6



Omdat driehoek AUB gelijkbenig is met tophoek $\angle AUB = 90°$, geldt dat $\angle UAB = 45°$. Op dezelfde manier geldt $\angle CAW = 45°$. Als we dit combineren vinden we $\angle WAU = 45° + \angle CAU = \angle CAB$. Met de stelling van Pythagoras vinden we $2|AW|^2 = |AW|^2 + |CW|^2 = |AC|^2$ en dus $|AW| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |AC|$. Op dezelfde manier vinden we $|AU| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |AB|$. Driehoeken WAU en CAB zijn dus gelijkvormig (zhz) met vergrotingsfactor $\frac{|AW|}{|AC|} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{|AU|}{|AB|}$. In het bijzonder vinden we $|WU| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |BC| = |CV|$.

Op dezelfde manier vinden we dat driehoeken VBU en CBA gelijkvormig zijn en dat $|VU| = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot |AC| = |CW|$. In vierhoek $UVCW$ zijn de overstaande zijden dus even lang en daarom is $UVCW$ een parallellogram. $\square$

3. a) Stel dat het aantal teams gelijk is aan 6. We leiden een tegenspraak af.

Merk eerst op dat het aantal wedstrijden gelijk is aan $\frac{6\times 5}{2} = 15$. Het totaal aantal behaalde punten is dus ook 15.

Noem het (enige) team met de laagste score team A. Team A heeft *hoogstens* 1 punt, want als team A 2 of meer punten zou hebben, dan zou elk van de andere vijf teams minstens 3 punten hebben en zou het totaal aantal punten minstens $2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 17$ zijn. Elk team op de voorlaatste plaats in de ranglijst heeft verloren van team A, want dat is het enige team met een lagere score. Team A heeft dus ook *minstens* 1 punt. We concluderen dat team A precies 1 punt heeft en dat er precies één team is, zeg team B, op de voorlaatste plaats in de ranglijst.

Team B heeft minstens 2 punten en de resterende vier teams, teams C, D, E en F, hebben elk minstens 3 punten. De zes teams hebben samen dus minstens $1+2+3+3+3+3 = 15$ punten. Als team B meer dan 2 punten heeft, of als een van de teams C tot en met F meer dan 3 punten heeft, dan zou het totaal aantal punten meer dan 15 zijn, wat onmogelijk is. Team B heeft dus precies 2 punten en teams C tot en met F hebben elk precies 3 punten. De vier teams C tot en met F hebben elk verloren van een team met een lagere score (team A of team B). Samen moeten team A en team B dus minstens 4 wedstrijden hebben gewonnen. Dit is in tegenspraak met het feit dat ze samen maar $1 + 2 = 3$ punten hebben.

$\square$

b) In de onderstaande tabel is een mogelijke uitkomst weergegeven met 7 teams genaamd A tot en met G. In de rij behorende bij een team is met kruisjes aangegeven tegen welke andere teams de wedstrijd gewonnen is. Rij 2 geeft bijvoorbeeld aan dat team B gewonnen heeft van teams C en D en dus een score heeft van 2 punten. Ieder team (behalve A) heeft inderdaad precies één wedstrijd verloren van een team met een lagere score. Deze wedstrijden zijn dikgedrukt in de tabel.

	A	B	C	D	E	F	G	Score
A	-	**X**						1
B		-	**X**	**X**				2
C	X		-		**X**		**X**	3
D	X		X	-		**X**		3
E	X	X		X	-	X		4
F	X	X	X			-	X	4
G	X	X		X	X		-	4

$\square$

4. a) Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $a < b < c$. De getallen a en c zijn niet deelbaar door p, want anders zou $ac+1$ een p-voud plus 1 zijn, en dus niet deelbaar door p. Omdat $bc+1$ en $ac+1$ deelbaar zijn door p, is ook het verschil $(bc+1)-(ac+1) = (b-a)c$ deelbaar door p. Aangezien c niet deelbaar is door p, moet $b-a$ deelbaar zijn door p. Net zo is $(ac+1)-(ab+1) = a(c-b)$ deelbaar door p en omdat a niet deelbaar is door p moet $c-b$ deelbaar zijn door p.
We zien dus dat $b = a + (b-a) \geqslant a + p$ en dat $c = b + (c-b) \geqslant a + 2p$.

Er geldt dat $a \geqslant 2$. Stel immers dat $a = 1$. Dan zijn de getallen $b + 1 = ab + 1$ en $b - 1 = b - a$ deelbaar door p. Ook het verschil $(b+1)-(b-1) = 2$ is dan deelbaar door p. Maar p is een oneven priemgetal en kan dus geen deler van 2 zijn.

Gebruikmakend van $a \geqslant 2$, $b \geqslant a+p$ en $c \geqslant a+2p$ vinden we nu dat

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a+(a+p)+(a+2p)}{3} = p + a \geqslant p + 2.$$

$\square$

__Opmerking.__ Om uit het feit dat p een deler is van $(b-a)c$ te concluderen dat p een deler is van $b-a$ of van c, gebruikt het bewijs dat p priem is. We schetsen hier een alternatief bewijs dat laat zien dat de bewering in de opgave blijft gelden als we van p alleen eisen dat het een geheel getal groter dan 2 is.

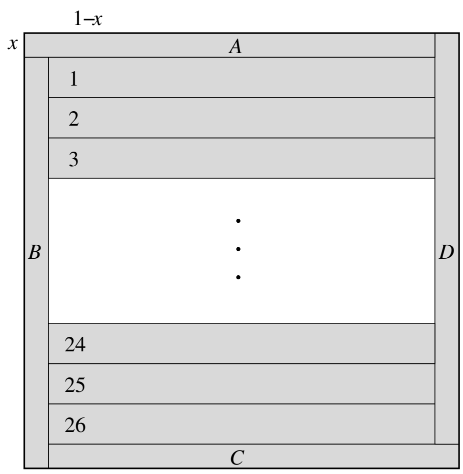
We mogen weer aannemen dat $a < b < c$. Merk op dat $a(bc+1) = abc+a$, $b(ac+1) = abc+b$ en $c(ab+1) = abc+c$ verschillende veelvouden zijn van p. De verschillen $(abc+b)-(abc+a) = b-a$ en $(abc+c)-(abc+b) = c-b$ zijn dan ook p-vouden. We kunnen nu wederom concluderen dat $b \geqslant a+p$ en $c \geqslant b+p \geqslant a+2p$. De rest van het bewijs gaat hetzelfde als het eerste bewijs.

b) We mogen weer aannemen dat $a < b < c$. In deel a) zagen we dat $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a+(a+p)+(a+2p)}{3} = p+a \geqslant p+2$. De gelijkheid $\frac{a+b+c}{3} = p+2$ kan alleen gelden als $b = a+p$, $c = a+2p$ en $a = 2$. Omdat $ab+1 = 2(2+p)+1 = 2p+5$ deelbaar moet zijn door p, moet ook 5 deelbaar zijn door p. We concluderen dat $p = 5$, $b = 7$ en $c = 12$. Het viertal $(p,a,b,c) = (5,2,7,12)$ is daadwerkelijk een Leids viertal want $ab+1 = 15$, $ac+1 = 25$ en $bc+1 = 85$ zijn alledrie deelbaar door p.

Alleen voor $p = 5$ bestaat er dus een Leids viertal (p,a,b,c) met $\frac{a+b+c}{3} = p+2$. □

5. a) Beschouw een rechthoek met zijden $a \leqslant b$ binnen het vierkant. Omdat $b \leqslant 1$ en $2a+2b = \frac{5}{2}$ geldt dat $a \geqslant \frac{1}{4}$. De oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan ab en dus minstens $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Er passen dus niet meer dan 16 rechthoeken in het vierkant zonder te overlappen. □

b) In de onderstaande figuur is een oplossing schematisch weergegeven. De vier buitenste rechthoeken A t/m D zijn gelijk en hebben een korte zijde van lengte x en een lange zijde van lengte $1-x$. Samen laten ze een vierkant gebied met zijden van lengte $1-2x$ onbedekt. Dit gebied wordt vervolgens betegeld met 26 gelijke rechthoeken. Deze 26 rechthoeken hebben elk dus zijden van lengte $1-2x$ en $\frac{1-2x}{26}$ en daarmee een omtrek van $\frac{54}{26}(1-2x)$. Om deze omtrek gelijk aan 2 te krijgen, nemen we $x = \frac{1}{54}$.



□