

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 12 september 2014
Technische Universiteit Eindhoven

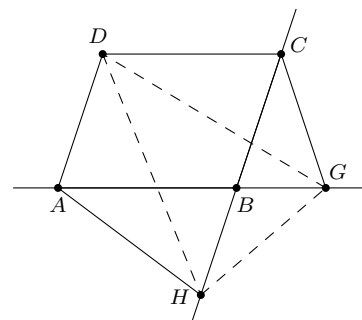
- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Bepaal alle drietallen (a, b, c) waarbij a, b en c positieve gehele getallen zijn met $a \leq b \leq c$ en $abc = 2(a + b + c)$.

2. Versie voor klas 5 & klas 4 en lager

Zij $ABCD$ een parallellogram met een scherpe hoek bij A . Op de lijn AB ligt een punt G , verschillend van B , zodat $|CG| = |CB|$. Op de lijn BC ligt een punt H , verschillend van B , zodat $|AB| = |AH|$.

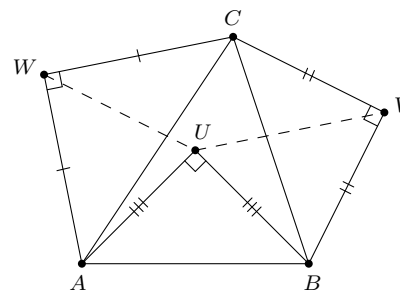
Bewijs dat driehoek DGH gelijkbenig is.



2. Versie voor klas 6

Op de zijden van driehoek ABC zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken AUB , CVB en AWC geplaatst, waarbij de hoeken bij U , V en W recht zijn. Driehoek AUB ligt geheel binnen driehoek ABC en driehoeken CVB en AWC liggen geheel buiten driehoek ABC . Zie de figuur.

Bewijs dat vierhoek $UVCW$ een parallellogram is.



3. Bij een volleybaltoernooi speelt elk team precies één keer tegen elk ander team. Elke wedstrijd heeft een winnaar, die 1 punt krijgt. De verliezer krijgt 0 punten. Gelijkspel kan niet voorkomen. In de eindranglijst blijkt er één team het laagste aantal punten te hebben (dus er is geen gedeelde laatste plaats). Verder blijkt elk team, behalve het team met de minste punten, precies één wedstrijd verloren te hebben van een team dat uiteindelijk minder punten heeft gehaald.

- Bewijs dat het aantal teams niet gelijk kan zijn aan 6.
- Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat het aantal teams wel gelijk kan zijn aan 7.

4. Een viertal (p, a, b, c) van positieve gehele getallen heet een *Leids viertal* als
- p een oneven priemgetal is,
 - a, b en c verschillend zijn en
 - $ab + 1, bc + 1$ en $ca + 1$ deelbaar zijn door p .
- a) Bewijs dat voor elk Leids viertal (p, a, b, c) geldt dat $p + 2 \leq \frac{a+b+c}{3}$.
- b) Bepaal alle getallen p waarvoor er een Leids viertal (p, a, b, c) bestaat met $p + 2 = \frac{a+b+c}{3}$.
5. We bekijken manieren om een vierkant van 1 bij 1 op te delen in rechthoeken (waarvan de zijden evenwijdig zijn aan die van het vierkant). De rechthoeken in een opdeling moeten allemaal dezelfde *omtrek* hebben, maar hoeven niet dezelfde vorm te hebben.
- a) Is het mogelijk om het vierkant op te delen in 20 rechthoeken die elk een omtrek van 2,5 hebben?
- b) Is het mogelijk om het vierkant op te delen in 30 rechthoeken die elk een omtrek van 2 hebben?