

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade



vrijdag 13 september 2013
Technische Universiteit Eindhoven

- Beschikbare tijd: 3 uur.
- Elke opgave is 10 punten waard. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden.
- Niet alleen het (eind)antwoord is van belang; alle stappen in je redenering moet je ook duidelijk opschrijven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.
- Maak iedere opgave op een apart vel en lever ook (per opgave!) je kladpapier in. Veel succes!

1. Van een tabel bestaande uit n bij n vierkantjes zijn sommige vierkantjes zwart en zijn de overige vierkantjes wit. Voor ieder tweetal kolommen en ieder tweetal rijen geldt dat de vier vierkantjes op de kruisingen van die rijen en kolommen niet allemaal dezelfde kleur hebben.

Wat is de grootst mogelijke waarde van n ?

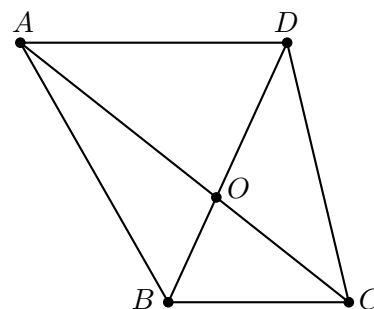
2. Vind alle drietallen (x, y, z) van reële getallen waarvoor geldt dat

$$x + y - z = -1, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad \text{en} \quad -x^3 + y^3 + z^3 = -1.$$

3. Van een vierhoek $ABCD$ is BC evenwijdig aan AD en is O het snijpunt van de diagonalen. Voor deze vierhoek geldt $|CD| = |AO|$ en $|BC| = |OD|$. Verder is CA de bissectrice van hoek BCD . Bepaal de grootte van hoek ABC .

Let op: het plaatje hiernaast klopt niet exact.

Je moet je redenering stap voor stap in tekst en formules opschrijven. Dingen die alleen in een plaatje aangegeven zijn, leveren geen punten op.



4. Voor een positief geheel getal n geven we met $P(n)$ het product van de positieve delers van n aan. Zo is bijvoorbeeld $P(20) = 8000$. De positieve delers van 20 zijn namelijk 1, 2, 4, 5, 10 en 20, met als product $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8000$.

(a) Vind alle positieve gehele getallen n waarvoor geldt dat $P(n) = 15n$.

(b) Laat zien dat er geen positieve gehele getallen n bestaan waarvoor geldt dat $P(n) = 15n^2$.

5. Het getal S is de uitkomst van de volgende som:

$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \dots + 10^{2013}.$$

Als het getal S wordt uitgeschreven, hoe vaak komt het cijfer '5' dan voor in het resultaat?